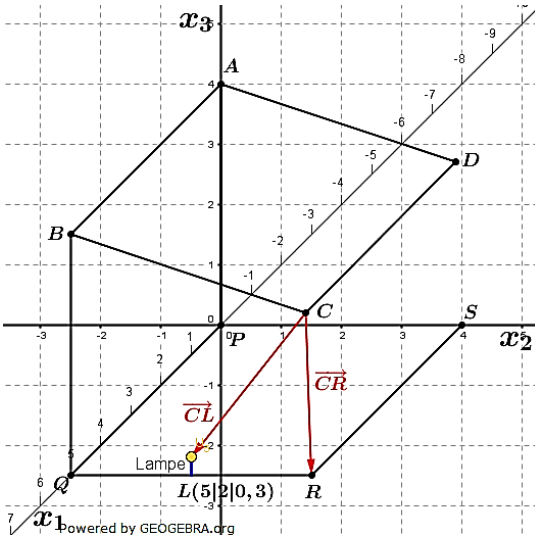
Aufgabe B1

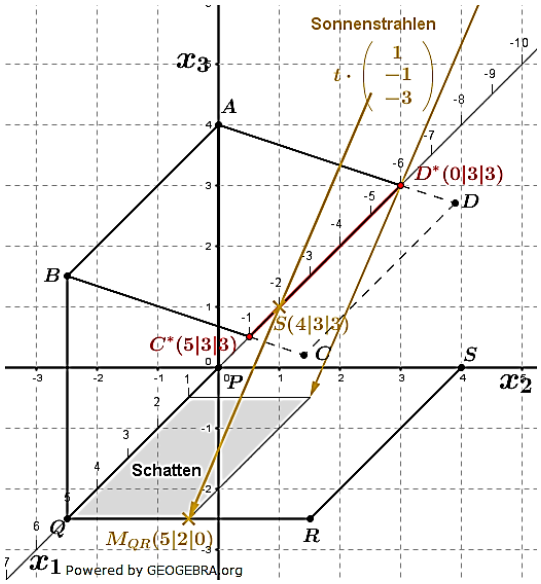
Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Zusammen mit dem Punkt A ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Winkel zwischen Markise und Hauswand:
Berechnung über den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Der Normalenvektor von E ist bereits errechnet, der Normalenvektor der x_1x_3-Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *Berührung der Lampe:*
Wir bestimmen zunächst die Koordinaten des oberen Lampenpunktes L.
Der Punkt C liegt auf $2{,}7\,m$ Höhe. Damit ist der Regenschutz $2{,}7\,m$ lang. Er berührt dann die Lampe, wenn der Betrag des Vektors $\overrightarrow{CL}$ kleiner als $2{,}7$ ist.
Höchstabstand Lampe:
Der Abstand der Lampe von der Hauswand wird durch die x_2–Koordinate l_2 der Lampe bestimmt. Der Höchstabstand ergibt sich durch Gleichsetzung der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{CR}$ und $\overrightarrow{CL}$, wobei die Koordinaten der Lampenspitze $L(5|l_2|0{,}3)$ sind.



c) *Begründung, dass Terrasse nicht vollständig beschattet wird:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise nach Einfahren derselben:
Der Mittelpunkt des Terrassenrandes hat die Koordinaten $M_{QR}(5|2|0)$. Einer der Sonnenstrahlen muss damit dort auftreffen. Die Markise muss soweit zurückgefahren werden, dass der Schnittpunkt S der Markisenebene E mit einer Geraden durch den Punkt M_{QR} mit Richtungsvektor des Einfallvektors der Sonnenstrahlen auf die zurückgefahrene Markisenkante C^*D^* zu liegen kommt. Hieraus lassen sich dann die Koordinaten der Markiseneckpunkte bestimmen.



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}5 \\ 19{,}5 \end{pmatrix} = 6{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_2 + 3x_3 = d$ | Punktprobe mit $A(0|0|4)$

$E\colon\ 0 + 3 \cdot 4 = d \quad \Longrightarrow \quad d = 12$

$E\colon\ x_2 + 3x_3 = 12$

Schnittwinkel von E mit x_1x_3-Ebene:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x_1x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_3}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{10}}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = 71{,}565\,°$

E schneidet die x_1x_3-Ebene unter einem Winkel von etwa $71{,}6\,°$.

b) *Berührung der Lampe:*

Lampenspitze $L(5|2|0{,}3)$

$|\overrightarrow{CL}| = \sqrt{(5-5)^2 + (2-3{,}9)^2 + (0{,}3-2{,}7)^2} = \sqrt{9{,}37} \approx 3{,}06$

Wegen $|\overrightarrow{CL}| > 2{,}7$ berührt der Regenschutz die Lampe nicht.

Höchstabstand Lampe:

Koordinaten der Lampenspitze sind nun $L(5|l_2|0{,}3)$

$|\overrightarrow{CL}| = \sqrt{(5-5)^2 + (l_2-3{,}9)^2 + (0{,}3-2{,}7)^2} = \sqrt{(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76}$

$|\overrightarrow{CL}| = 2{,}7$

$\sqrt{(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76} = 2{,}7$ | $\uparrow^2$

$(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76 = 7{,}29$ | $-5{,}76$

$(l_2-3{,}9)^2 = 1{,}53$ | $\sqrt{}$

$|l_2 - 3{,}9| = 1{,}24 \Longrightarrow l_{2_1} = 2{,}66$

$l_2 - 3{,}9 = 1{,}24 \Longrightarrow l_{2_2} = 5{,}14$

Wegen $|\overrightarrow{QR}| = 4$ entfällt die Lösung l_{2_1}.

Die Lampe darf höchstens $2{,}66\,m$ von der Hauswand entfernt sein.

c) *Begründung, dass Terrasse nicht vollständig beschattet wird:*

Die x_2–Richtung des Richtungsvektors der Sonnenstrahlen ist negativ, also gegen die Rückwand gerichtet.

Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise nach Einfahren derselben:

Mittelpunkt des Terrassenrandes ist $M_{QR}(5|2|0)$. Punkt soll im Schatten liegen, also muss Sonnenstrahl dort auftreffen.

$$g_{M_{QR}}\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g_{M_{QR}} \cap E\colon\ x_1 = 5 + t;\ x_2 = 2 - t;\ x_3 = -3t$

$2 - t + 3 \cdot (-3t) = 12$

$-10t = 10 \Longrightarrow t = -1$

$$t \longrightarrow g_{M_{QR}}\colon \quad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

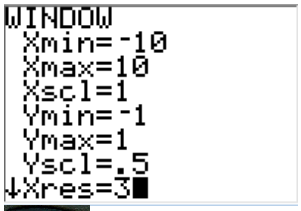
Der Sonnenstrahl schneidet die Ebene E in $S(4|3|3)$. Die Markise muss nun soweit zurückgefahren werden, dass der Punkt S auf der Kante C^*D^* zu liegen kommt. Da diese Kante parallel zur x_1–Achse verläuft (x_2- und x_3–Koordinate bleiben unverändert), ergeben sich die Koordinaten. $C^*(5|3|3)$ und $D^*(0|3|3)$.

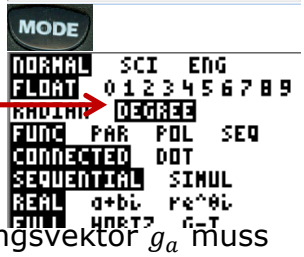
Aufgabe B2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1$=|3X+6|/(\sqrt{X^2+1})*\sqrt{61})-sin\,(10)$





Achtung: GTR-MODE muss auf *DEGREE* stehen.

a) *Schnittpunkt von g_4 mit E:*
Wir bilden $g_4 \cap E$.
Gerade der Schar orthogonal zu g_4:
Das Skalarprodukt aus Richtungsvektors g_4 und Richtungsvektor g_a muss Null sein. Hieraus errechnet sich a.

b) *Schnittwinkel von g_4 mit E:*
Wir verwenden die Schnittwinkelformel mit $\sin(\varphi) = \cdots$ für Schnittwinkel aus Gerade und Ebene.
Werte von a für $\varphi = 10\,°$:
Es gilt: $sin(10°) = \frac{|\overrightarrow{rv_{ga}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{ga}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$. Lösung per GTR.

c) *Begründung alle g_a in F:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Gleichung der Geraden h:
Die Gerade h hat nach Aufgabenstellung denselben Aufpunkt wie die Geradenschar g_a. Soll h nicht zur Geradenschar gehören, so muss sie einen Richtungsvektor haben, der durch den Richtungsvektor von g_a nicht abgebildet werden kann. Dies ist z. Bsp. mit $\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ der Fall., da die x_2-Komponente von $\overrightarrow{rv_{ga}}$ nie Null werden kann.

Klausuraufschrieb

a) *Schnittpunkt von g_4 mit E:*

g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

$x_1 = 5 + 4t; \quad x_2 = 1 + t; \quad x_3 = 1$

$g_4 \cap E$:

$3(5+4t) + 6(1+t) + 4 \cdot 1 = 16$

$15 + 12t + 6 + 6t + 4 = 16$

$18t = -9 \quad \Longrightarrow \quad t = -0{,}5$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$

g_4 schneidet E in $S(3|0{,}5|1)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Gerade der Schar orthogonal zu g_4:

$\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{rv_{ga}} = 0$

$\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$4a + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$

Die Gerade $g_{-\frac{1}{4}}$ schneidet g_4 orthogonal in $P(5|1|1)$.

b) *Schnittwinkel von g_4 mit E:*

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{g4}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}\right) = 33{,}9841°$

Der Schnittwinkel g_4 mit E beträgt etwa $34\,°$.

Werte von a für $\varphi = 10\,°$:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{g4}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} = sin\,(10°)$$

$\frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} - sin(10°) = 0$

$a_1 = -3{,}7581; \quad a_2 = -1{,}2694$

Für $a = -3{,}8 \vee a = -1{,}3$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $10\,°$.

c) *Begründung alle g_a in F:*

Die Ebene F mit F: $x_3 = 1$ liegt parallel zur x_1x_2–Ebene im Abstand $x_3 = 1$. Alle Geraden der Schar g_a verlaufen ebenfalls parallel zur x_1x_2–Ebene, da die x_3–Komponente des Richtungsvektors 0 ist. Der Abstand aller Geraden zur x_1x_2–Ebene ist ebenfalls 1, da die x_3–Komponente des Aufpunktes $x_3 = 1$ ist, also verlaufen alle g_a in F.

Gleichung der Geraden h in F:

Stützvektor von h: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

Richtungsvektor von : $\overrightarrow{rv_h} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ kann von $t \cdot \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$ nie abgebildet werden.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$