



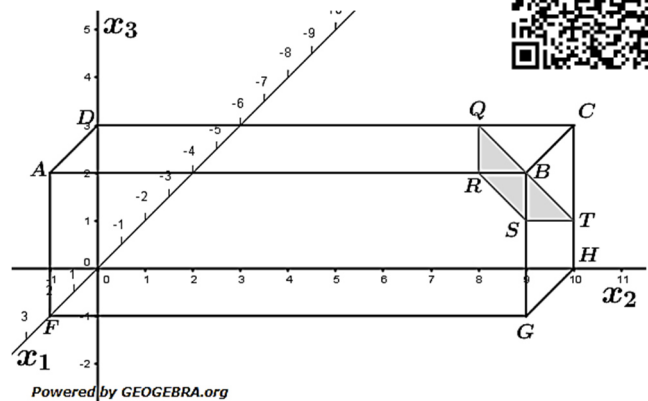
### Aufgabe B1

Ein Künstler teilt einen quaderförmigen Container durch einen ebenen Schnitt in einen großen und kleinen Teilkörper. Der Container wird in einem Koordinatensystem als Quader mit den Eckpunkten  $A(2|0|3)$ ,  $B(2|10|3)$ ,  $C(0|10|3)$ ,  $D(0|0|3)$ ,  $F(2|0|0)$ ,  $G(2|10|0)$ ,  $H(0|10|0)$  und  $O(0|0|0)$  dargestellt.

(Koordinatenangaben in Meter).

Die Ebene  $E$  schneidet die Kanten des Quaders in den Punkten  $R(2|9|3)$ ,  $S(2|10|2)$ ,  $T(0|10|1)$  und  $Q(0|8|3)$ .

Die Eckpunkte der Dachfläche liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche. Der kleine Teilkörper hat also die Eckpunkte  $Q, R, S, T, B, C$ .



- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E$ .  
Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck  $QRST$  um ein Trapez handelt.  
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes  $QRST$ .  
(Teilergebnis:  $E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$ )
- Der kleine Körper wird mit den Schnittkanten nach unten auf den großen Teilkörper gestellt.  
Bestimmen Sie die Höhe des zusammengesetzten Körpers.
- Der Container besitzt eine Tür, die im geschlossenen Zustand durch das Viereck  $ODAF$  dargestellt wird. Die Tür ist drehbar um die Kante, die durch die Strecke  $\overline{OD}$  beschrieben wird.  
Jede Ebene  $T_a: ax_1 + x_2 = 0$ ;  $a \geq 0$  beschreibt eine mögliche Stellung dieser Tür.  
Bestimmen Sie den Wert für  $a$ , für den der Öffnungswinkel der Tür  $30^\circ$  beträgt.

### Aufgabe B2

Zwei Flugzeuge  $F_1$  und  $F_2$  bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit über dem offenen Meer. In einem Koordinatensystem beschreibt die  $x_1x_2$ -Ebene die Meeresoberfläche. Die Beobachtung der Flugzeuge beginnt im 14:00 Uhr. Die Flugbahn von  $F_1$  wird beschrieben durch die Gleichung

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach Beobachtungsbeginn}).$$

Der Punkt  $P(-17|54|3,2)$  beschreibt die Position von  $F_2$  um 14:00 Uhr, der Punkt  $Q(1|36|3,8)$  die Position von  $F_2$  um 14:03 Uhr (1 LE entspricht 1 km).

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit von  $F_1$  in  $km/min$ .  
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem  $F_1$  eine Höhe von  $4,9 km$  erreicht.  
Berechnen Sie die Weite des Winkels, mit dem das Flugzeug  $F_2$  steigt.

# Wahlteilaufgaben zur analytischen Geometrie

*Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW*

- b) Die Flugbahnen  $F_1$  und  $F_2$  schneiden sich.  
Aus Sicherheitsgründen müssen die Zeitpunkte, zu denen die Flugzeuge den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen durchfliegen, mindestens einer Minute auseinander liegen.  
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.
- c) Die Position eines Ballons wird durch den Punkt  $B(6|43|4,3)$  beschrieben.  
Bestimmen Sie einen Zeitpunkt  $t_0$ , zu dem beide Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben.  
Die Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt  $t_0$  ebenfalls von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind, liegen auf einer Geraden.  
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung dieser Geraden bestimmen kann.

**Lösung B1**

**Lösungslogik**

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren  $\overrightarrow{RS}$  und  $\overrightarrow{RT}$ . Zusammen mit dem Punkt R ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.

*Viereck QRST ist ein Trapez:*

Das Viereck ist ein Trapez wenn gilt:  $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{QT} \wedge |\overrightarrow{RS}| \neq |\overrightarrow{QT}|$ . Weiteres ist nicht nachzuweisen.

*Flächeninhalt des Trapezes QRST:*

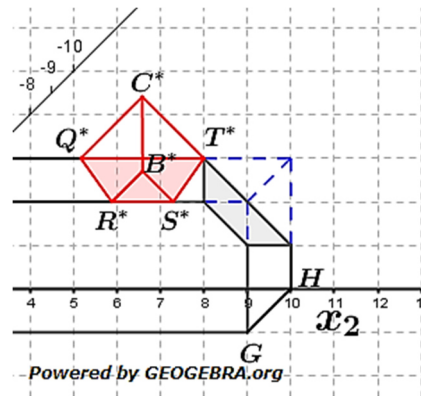
Wir bestimmen den Abstand  $d(S; g_{QT})$  des Punktes S von der Geraden durch Q und T. Dies ist die Höhe des Trapezes, sodass der Flächeninhalt sich

errechnet aus  $A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{RS}| + |\overrightarrow{QT}|}{2} \cdot d(S; g_{QT})$ .

b) *Höhe des zusammengesetzten Körpers:*

Aus der nebenstehenden Teilgrafik ergibt sich, dass wir zunächst den Abstand des Punktes C von der Ebene E ermitteln müssen, denn C ist der Punkt mit dem größten Abstand zu E.

Aus der Höhe des Containers zuzüglich dem Abstand wie angeführt errechnet sich dann die Höhe des zusammengesetzten Körpers. Abstandsberechnung über die HNF.



c) *a für  $T_{\alpha}$ , dass Öffnungswinkel der Tür = 30° ist.*

Das Viereck ADOF (Tür geschlossen) ist die  $x_1x_3$ -Ebene selbst mit  $F: x_2 = 0$ . Wird die Tür geöffnet, so errechnet sich der Schnittwinkel über die Formel für Schnittwinkel von Ebene/Ebene mit  $\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$ . Mit  $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$  lässt sich dann  $a$  ermitteln.

**Klausuraufschrieb**

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$  | Punktprobe mit  $R(2|9|3)$

$E: -2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = d \Rightarrow d = 22$

$E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$

**Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW**

Viereck  $QRST$  ist ein Trapez:

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{RS}| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{QT}| = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RS}$$

Wegen  $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{QT} \wedge |\overrightarrow{RS}| \neq |\overrightarrow{QT}|$  ist das Viereck  $QRST$  ein Trapez.

**Flächeninhalt des Trapezes  $QRST$ :**

Abstand des Punktes  $S$  von der Geraden durch  $QT$  und  $R$ :

$$d(S; g_{QT}) = \frac{|\overrightarrow{QT} \times \overrightarrow{TS}|}{|\overrightarrow{QT}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

$$A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{RS}| + |\overrightarrow{QT}|}{2} \cdot d(S; g_{QT}) = \frac{\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{2} = 4,5.$$

Das Trapez hat eine Fläche von  $4,5 \text{ m}^2$ .

b) **Höhe des zusammengesetzten Körpers:**

Höhe des Containers:  $3 \text{ m}$ .

Abstand von Punkt  $C$  zur Ebene  $E$  über die HNF:

$$d(C; E) = \frac{-0+2 \cdot 10+2 \cdot 3-22}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{4}{3}$$

$$h_{\text{cont}} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

Die Höhe des zusammengesetzten Körpers beträgt  $\frac{4}{3} \text{ m}$ .

c)  $a$  für  $T_{\alpha}$ , dass Öffnungswinkel der Tür  $= 30^\circ$  ist.

Geschlossene Tür  $ADOF$  liegt in der  $x_1x_3$ -Ebene mit dem Normalenvektor

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_T = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Öffnungswinkel über  $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_T \circ \vec{n}_F|}{|\vec{n}_T| \cdot |\vec{n}_F|}$  mit  $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

$$\frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1} \cdot 1} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad | \quad \uparrow^2$$

$$a^2+1 = \frac{4}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

Untersuchung, welches  $a$  gilt:

$$T: \frac{1}{3} \sqrt{3} x_1 + x_2 = 0$$

$x_2$ -Koordinate für  $x_1 = 1$ :

$$\frac{1}{3} \sqrt{3} + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$$

Somit gilt  $a = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ , wie auch aus der Aufgabenstellung hervorgeht.

*Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW*

**Lösung B2**

Lösungslogik

a) *Geschwindigkeit  $F_1$ :*

Wegen *Geschwindigkeit  $F_1$* : in Minuten ist dies  $\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right|$  (Richtungsvektor der Geraden  $g_1$ ).

*Zeitpunkt, zu dem  $F_1$  die Höhe 4,9 km erreicht:*

Die  $x_3$ -Koordinate der Geradengleichung  $g_1$  ist maßgebend für die Höhe des Flugzeuges. Es muss also gelten:  $x_3 = 4,9 = 3,4 + t \cdot 0,3$ .

*Steigwinkel von  $F_2$ :*

Dies ist der Winkel, unter dem der Richtungsvektor von  $g_2$  die  $x_1x_2$ -Ebene schneidet.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Zunächst Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Fluggeraden  $g_1$  und  $g_2$ . Danach Umrechnung des Richtungsvektors von  $F_2$  auf gleiche Geschwindigkeit wie  $F_1$ .

Berechnung der Zeit von  $F_1$  für die Strecke zwischen Aufpunkt und Schnittpunkt. Gleiches für  $F_2$ .

c) *Abstand von  $F_1$  und  $F_2$  zum Ballon:*

Auch hier muss mit gleichen Geschwindigkeiten beider Flugzeuge gerechnet werden.

Es handelt sich um eine Abstandsberechnung von Punkt zu Punkt. Sei  $F$  der Aufpunkt von  $F_1$  und  $G$  der Aufpunkt von  $F_2$ , dann muss gelten  $|\overline{FB}| = |\overline{GB}|$ .

Klausuraufschrieb

a) *Geschwindigkeit  $F_1$ :*

$$v_{F_1} = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 144 + 0,09} = \sqrt{160,09} = 12,65$$

$F_1$  hat eine Geschwindigkeit von etwa 12,65 km/min.

*Zeitpunkt, zu dem  $F_1$  die Höhe 4,9 km erreicht:*

$$x_3 = 4,9 = 3,4 + t \cdot 0,3 \Rightarrow t = 5$$

5 Minuten nach Beobachtungsbeginn erreicht  $F_1$  die Höhe 4,9 km.

*Steigwinkel  $\varphi$  von  $F_2$ :*

Fluggerade von  $F_2$ :

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 0,6 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}; s \text{ in 3 Minuten}$$

Wegen  $s$  in 3 Minuten gilt auch für  $F_2$ :

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}; t \text{ in Minuten.}$$

Damit sind  $F_1$  und  $F_2$  vergleichbar.

$$\sin(\varphi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0,2}{\sqrt{72,04}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{0,2}{\sqrt{72,04}}\right) = 1,35^\circ$$

**Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW**

b) Prüfung des Sicherheitsabstandes:

Ermittlung des Schnittpunktes der beiden Fluggeraden.

$$g_1 \cap g_2$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix}$$

$$-4t - 6s = -32$$

$$12t + 6s = 48$$

$$0,3t - 0,2s = -0,2$$

$$t = 2; \quad s = 4$$

$F_1$  erreicht den Schnittpunkt nach 2 Minuten,  $F_2$  nach 4 Minuten, der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

[A]	$\begin{bmatrix} -4 & -6 & -32 \\ 12 & 6 & 48 \\ .3 & -.2 & -.2 \end{bmatrix}$
rref([A])	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) Abstand von  $F_1$  und  $F_2$  zum Ballon:

Sei  $F$  der Aufpunkt von  $F_1$  und  $G$  der Aufpunkt von  $F_2$  so muss gelten:

$$|\overrightarrow{FB}| = |\overrightarrow{GB}|$$

$$|\overrightarrow{FB}| = \sqrt{(15 - 4t - 6)^2 + (6 + 12t - 43)^2 + (3,4 + 0,3t - 4,3)^2}$$

$$|\overrightarrow{GB}| = \sqrt{(-17 + 6t - 6)^2 + (54 - 6t - 43)^2 + (3,2 + 0,2t - 4,3)^2}$$

$$t_1 \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 2,27; \quad t_2 \stackrel{\text{GTR}}{=} 4,0$$

Es gibt zwei Zeitpunkte, zu denen die beiden Flugzeuge gleich weit vom Ballon entfernt sind. (Eine Lösung hätte nach Aufgabenstellung ausgereicht).

*Verfahren zur Bestimmung der Punkte auf der Meeresoberfläche mit gleich weiter Entfernung zu den beiden Flugzeugen:*

Man bestimmt die Position der Flugzeuge  $P_1$  bzw.  $P_2$  z. B. zum Zeitpunkt  $t_2$ .

Die Ebene durch den Punkt  $B$  (Position des Ballons) mit dem Vektor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  als Normalenvektor, also  $E: (\vec{x} - \overrightarrow{OB}) \circ \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ , enthält alle Punkte, die von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der  $x_1x_2$ -Ebene enthält dann alle Punkte auf der Meeresoberfläche, die von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind.