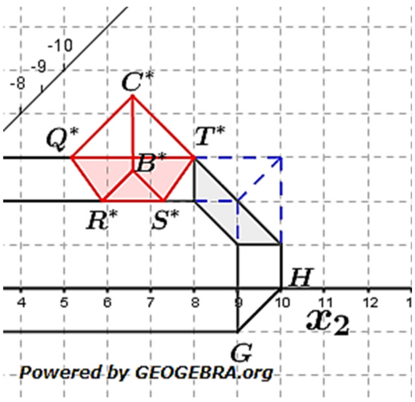
Lösung B1
Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{RS}$ und $\overrightarrow{RT}$. Zusammen mit dem Punkt R ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Viereck $QRST$ ist ein Trapez:
Das Viereck ist ein Trapez wenn gilt: $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{QT} \wedge |\overrightarrow{RS}| \neq |\overrightarrow{QT}|$. Weiteres ist nicht nachzuweisen.
Flächeninhalt des Trapezes $QRST$:
Wir bestimmen den Abstand $d(S; g_{QT})$ des Punktes S von der Geraden durch Q und T. Dies ist die Höhe des Trapezes, sodass der Flächeninhalt sich errechnet aus $A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{RS}|+|\overrightarrow{QT}|}{2} \cdot d(S; g_{QT})$.

b) *Höhe des zusammengesetzten Körpers:*
Aus der nebenstehenden Teilgrafik ergibt sich, dass wir zunächst den Abstand des Punktes C von der Ebene E ermitteln müssen, denn C ist der Punkt mit dem größten Abstand zu E.
Aus der Höhe des Containers zuzüglich dem Abstand wie angeführt errechnet sich dann die Höhe des zusammengesetzten Körpers.
Abstandsberechnung über die HNF.



c) a für T_a, *dass Öffnungswinkel der Tür* $= 30°$ *ist.*
Das Viereck $ADOF$ (Tür geschlossen) ist die x_1x_3-Ebene selbst mit F: $x_2 = 0$.
Wird die Tür geöffnet, so errechnet sich der Schnittwinkel über die Formel für Schnittwinkel von Ebene/Ebene mit $cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$. Mit $cos(30°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ lässt sich dann a ermitteln.

Klausuraufschrieb
a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E:\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$ | Punktprobe mit $R(2|9|3)$
$E:\ -2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = d \quad \Rightarrow \quad d = 22$
$E:\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW

Viereck $QRST$ ist ein Trapez:

$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $|\overrightarrow{QT}| = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$

$-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RS}$

Wegen $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{QT} \wedge |\overrightarrow{RS}| \neq |\overrightarrow{QT}|$ ist das Viereck $QRST$ ein Trapez.

Flächeninhalt des Trapezes $QRST$:

Abstand des Punkts von der Geraden durch und :

$d(S; g_{QT}) = \frac{|\overrightarrow{QT} \times \overrightarrow{TS}|}{|\overrightarrow{QT}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{RS}| + |\overrightarrow{QT}|}{2} \cdot d(S; g_{QT}) = \frac{\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 4{,}5.$

Das Trapez hat eine Fläche von $4{,}5\, m^2$.

b) *Höhe des zusammengesetzten Körpers:*

Höhe des Containers: $3\, m$.

Abstand von Punkt C zur Ebene E über die HNF:

$d(C; E) = \frac{-0 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 3 - 22}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{4}{3}$

$h_{Cont} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$

Die Höhe des zusammengesetzten Körpers beträgt $\frac{4}{3}\, m$.

c) a für T_a*, dass Öffnungswinkel der Tür* $= 30\,°$ *ist.*

Geschlossene Tür $ADOF$ liegt in der x_1x_3-Ebene mit dem Normalenvektor

$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n_T} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Öffnungswinkel über $\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_T} \circ \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_T}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$ mit $\cos(30\,°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{a^2+1} \cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sqrt{a^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad | \quad \uparrow \; 2$

$a^2 + 1 = \frac{4}{3} \Longrightarrow \; a^2 = \frac{1}{3}$

$a = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Untersuchung, welches a gilt:

$T\colon \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$

x_2-Koordinate für $x_1 = 1$:

$\frac{1}{3}\sqrt{3} + x_2 = 0 \Longrightarrow \; x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Somit gilt $a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, wie auch aus der Aufgabenstellung hervorgeht.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Geschwindigkeit F_1:*

Wegen *Geschwindigkeit F_1:* in Minuten ist dies $\left|\begin{pmatrix}-4\\12\\0{,}3\end{pmatrix}\right|$ (Richtungsvektor der Geraden g_1.

Zeitpunkt, zu dem F_1 die Höhe $4{,}9\ km$ erreicht:

Die x_3-Koordinate der Geradengleichung g_1 ist maßgebend für die Höhe des Flugzeuges. Es muss also gelten: $x_3 = 4{,}9 = 3{,}4 + t \cdot 0{,}3$.

Steigwinkel von F_2:

Dies ist der Winkel, unter dem der Richtungsvektor von g_2 die x_1x_2-Ebene schneidet.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Zunächst Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Fluggeraden g_1 und g_2. Danach Umrechnung des Richtungsvektors von F_2 auf gleiche Geschwindigkeit wie F_1.

Berechnung der Zeit von F_1 für die Strecke zwischen Aufpunkt und Schnittpunkt. Gleiches für F_2.

c) *Abstand von F_1 und F_2 zum Ballon:*

Auch hier muss mit gleichen Geschwindigkeiten beider Flugzeuge gerechnet werden.

Es handelt sich um eine Abstandsberechnung von Punkt zu Punkt. Sei F der Aufpunkt von F_1 und G der Aufpunkt von F_2, dann muss gelten $|\overrightarrow{FB}| = |\overrightarrow{GB}|$.

Klausuraufschrieb

a) *Geschwindigkeit F_1:*

$$v_{F_1} = \left|\begin{pmatrix}-4\\12\\0{,}3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+144+0{,}09} = \sqrt{160{,}09} = 12{,}65$$

F_1 hat eine Geschwindigkeit von etwa $12{,}65\ km/min$.

Zeitpunkt, zu dem F_1 die Höhe $4{,}9\ km$ erreicht:

$x_3 = 4{,}9 = 3{,}4 + t \cdot 0{,}3 \implies t = 5$

5 Minuten nach Beobachtungsbeginn erreicht F_1 die Höhe $4{,}9\ km$.

Steigwinkel φ von F_2:

Fluggerade von F_2:

$$g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-17\\54\\3{,}2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}18\\-18\\0{,}6\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R};\ s \text{ in 3 Minuten}$$

Wegen s in 3 Minuten gilt auch für F_2:

$$g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-17\\54\\3{,}2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\-6\\0{,}2\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R};\ t \text{ in Minuten.}$$

Damit sind F_1 und F_2 vergleichbar.

$$sin(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix}6\\-6\\0{,}2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}6\\-6\\0{,}2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0{,}2}{\sqrt{72{,}04}}$$

$$\varphi = arcsin\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{72{,}04}}\right) = 1{,}35\,°$$

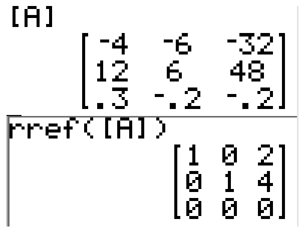
Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Ermittlung des Schnittpunktes der beiden Fluggeraden.

$g_1 \cap g_2$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix}$$



$-4t - 6s = -32$

$12t + 6s = 48$

$0{,}3t - 0{,}2s = -0{,}2$

$t = 2; \quad s = 4$

F_1 erreicht den Schnittpunkt nach 2 Minuten, F_2 nach 4 Minuten, der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

c) *Abstand von F_1 und F_2 zum Ballon:*

Sei F der Aufpunkt von F_1 und G der Aufpunkt von F_2 so muss gelten:

$\left|\overrightarrow{FB}\right| = \left|\overrightarrow{GB}\right|$

$\left|\overrightarrow{FB}\right| = \sqrt{(15 - 4t - 6)^2 + (6 + 12t - 43)^2 + (3{,}4 + 0{,}3t - 4{,}3)^2}$

$\left|\overrightarrow{GB}\right| = \sqrt{(-17 + 6t - 6)^2 + (54 - 6t - 43)^2 + (3{,}2 + 0{,}2t - 4{,}3)^2}$

$t_1 \overset{\text{GTR}}{\approx} 2{,}27; \quad t_2 \overset{\text{GTR}}{=} 4{,}0$

Es gibt zwei Zeitpunkte, zu denen die beiden Flugzeuge gleich weit vom Ballon entfernt sind. (Eine Lösung hätte nach Aufgabenstellung ausgereicht).

Verfahren zur Bestimmung der Punkte auf der Meeresoberfläche mit gleich weiter Entfernung zu den beiden Flugzeugen:

Man bestimmt die Position der Flugzeuge P_1 bzw. P_2 z. B. zum Zeitpunkt t_2.
Die Ebene durch den Punkt B (Position des Ballons) mit dem Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Normalenvektor, also $E\colon \left(\vec{x} - \overrightarrow{OB}\right) \circ \overrightarrow{P_1P_2} = 0$, enthält alle Punkte, die von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der x_1x_2-Ebene enthält dann alle Punkte auf der Meeresoberfläche, die von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind.