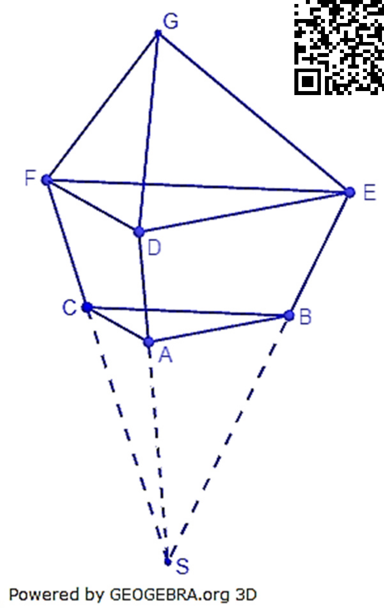
Aufgabe B1



Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die Horizontale. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene. In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-58|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$ und $G(-10|10|35)$.
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht $1\,m$ in der Realität.

a) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.
Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\15\end{pmatrix} <=> \quad r=s=3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\15\\-30\end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad S(-15|15|-30)$$

Erläutern Sie die Schritte des dargestellten Vorgehens.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Bodenfläche der oberen Etage.
Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für jeweils $100\,m^3$ Rauminhalt eine elektrische Leistung von $0{,}8$ Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass zur Entfeuchtung der Luft eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

c) An einer Metallstange, deren Enden durch die Punkte G und $R(-5|5|15)$ dargestellt werden, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt.
Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von $8\,m$ diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

Aufgabe B2

Gegeben sind die Ebenen $E\colon\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ und $F\colon\ 2x_1 + x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass E nicht orthogonal zu F ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

Die Ebenen E und F gehören zur Ebenenschar $E_a\colon\ \ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4;\ \ a \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie an, für welche Werte von a die zugehörige Ebene E_a alle drei Koordinatenachsen schneidet.
Für diese Werte von a bilden die Spurpunkte von E_a zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen $6\,VE$ beträgt.

c) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist.
Begründen Sie, dass die Schar keine zueinander parallelen Ebenen enthält.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2018 BW

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Obere Bodenfläche nicht rechtwinklig:*
Keines der Skalarprodukte von $\overrightarrow{FD}$ und $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FD}$ und $\overrightarrow{FE}$ als auch $\overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{DE}$ darf Null sein.
Bedeutung der dargestellten Berechnung:
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Bodenfläche der oberen Etage:*
Die Bodenfläche der oberen Etage wird durch das Dreieck DEFgebildet. Zur Berechnung dessen Fläche bilden wir $A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right|$.
Dimensionierung der Luftentfeuchtungsanlage:
Nachdem wir zuvor ja die Grundfläche ermittelt haben, berechnet sich das Volumen der oberen Dreieckspyramide aus $V_{DEFG} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right) \circ \overrightarrow{FG}\right|$. Ist das Volumen nicht größer als $25 : 0{,}8\, m^3$, ist die Leistung der Anlage mit Kilowatt ausreichend.

c) *Koordinaten des Befestigungspunktes eines Scheinwerfers.*
Die zu beleuchtende Wand wird durch das Dreieck EFG dargestellt, wir stellen die Koordinatengleichung einer Ebene E auf, in der Das Dreieck EFG liegt.
Die Befestigungsstange für den Scheinwerfer wird durch die Gerade durch die Punkte G und $R(-5|5|15)$ dargestellt. Auf der Geraden liegt der Befestigungspunkt $B(b_1|b_2|b_3)$. Der Abstand dieses Punktes B zur Ebene E soll $8\, m$ betragen.
Wir berechnen den Abstand B zur Ebene E über die HNF.

Klausuraufschrieb

a) *Obere Bodenfläche nicht rechtwinklig:*

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = -150$$

$$\overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = 625 - 125 = 550$$

$$\overrightarrow{FE} \circ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 750$$

Keines der drei Skalarprodukte ist gleich Null, das Dreieck DEF ist nicht rechtwinklig.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2018 BW

Bedeutung der dargestellten Berechnung:

Eine Gerade g durch die Punkte D und A wird mit einer Geraden h durch die Punkte E und B geschnitten. Das daraus resultierende lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit $r = s = 3$.

Durch den Einsatz des Skalierungsfaktors $r = 3$ in die Geradengleichung g errechnen sich die Koordinaten der Spitze S der dargestellten Doppel-pyramide.

b) $A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -750 \end{pmatrix}\right| = 375$

Die Bodenfläche der oberen Etage hat eine Fläche von $375\,m^2$.

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$

$V_{DEFG} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right) \circ \overrightarrow{FG}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -750 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-15000| = 25000$

Das Volumen der oberen Etage beträgt $25000\,m^3$.

$25000 : 100 \cdot 0{,}8 = 20 < 25$

Die Leistung der Entfeuchtungsanlage ist ausreichend dimensioniert.

c) *Koordinaten des Befestigungspunktes eines Scheinwerfers.*

Koordinatengleichung einer Ebene E in der die Wand EFG liegt:

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{FE} \times \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -500 \\ -250 \end{pmatrix} = 250 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{EFG}:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = d$

$2 \cdot 0 - 2 \cdot 30 - 15 = d$

$d = -75$

$E_{EFG}:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -75$

Gerade g durch G und $R(-5|5|15)$

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$

Der Befestigungspunkt B des Scheinwerfers hat somit die Koordinaten $B(-10 + 5r|10 - 5r|35 - 20r)$.

Abstand von B zu E_{EFG} ist $8\,m$:

$\frac{|2x_1 - 2x_2 - x_3 + 75|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 8 \qquad |\quad$ HNF

$\frac{|2 \cdot (-10 + 5r) - 2 \cdot (10 - 5r) - (35 - 20r) + 75|}{3} = 8$

$|-20 + 10r - 20 + 10r - 35 + 20r + 75| = 24$

$|40r| = 24$

$40r_1 = 24 \ \ => \ \ r_1 = 0{,}6$

$40r_2 = -24 \ \ => \ \ r_2 = -0{,}6$

Da der Richtungsvektor der Vektor $\overrightarrow{GR}$ ist, kommt die Lösung nicht in Frage.

$B(-10 + 5 \cdot 0{,}6|10 - 5 \cdot 0{,}6|35 - 20 \cdot 0{,}6) = B(-7|7|23)$

Der Scheinwerfer wird auf Position $B(-7|7|23)$ montiert.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2018 BW

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Wir berechnen die Spurpunkte der Ebene E und zeichnen dieselbe in ein Koordinatensystem.
Orthogonalität von E und F:
Wir bilden das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_F}$.
Schnittgerade s:
Wir schneiden E und F und ermitteln aus dem Gleichungssystem die Geradengleichung von s.

b) *Wert von a für Schnitt aller Koordinatenachsen:*
Die Ebenengleichung muss alle drei Komponenten , und beinhalten.
Dreieckspyramide mit Volumen $6\,VE$:
Der Ursprung und die beiden Spurpunkte S_{x_1} und S_{x_2} stellen die Grundfläche der Pyramide als rechtwinkliges Dreieck dar, die Pyramidenspitze liegt Spurpunkt S_{x_3}. Wir bestimmen a über die Volumenformel einer Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

c) *Wert für a, sodass Abstand zu $P(0|0|1)$ maximal wird:*
Wir berechnen den Abstand von E_a zu P über die HNF.
Begründung Schar enthält keine parallelen Ebenen:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

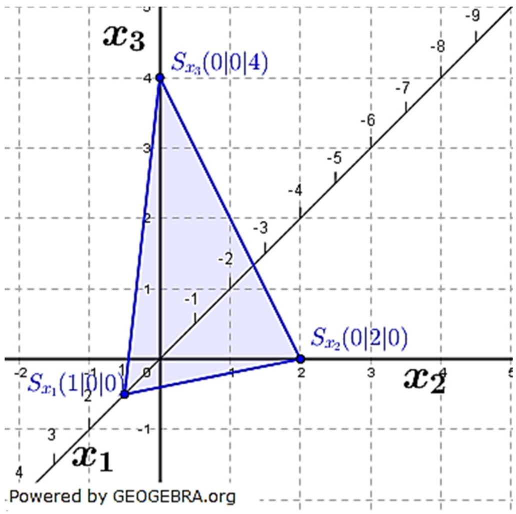
a) *Darstellung in Koordinatensystem:*

$E\colon\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \qquad | \quad :4$

$E\colon\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} = 1 \qquad | \quad$ Achsenabschnittsform

$S_{x_1}(1|0|0);\quad S_{x_2}(0|2|0);\quad S_{x_3}(0|0|4)$

Darstellung siehe Graphik rechts.



Orthogonalität von E und F:

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 0 + 1 = 9 \neq 0$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} \neq 0$ sind E und F nicht orthogonal.

Schnittgerade s:

$E \cap F$

(1) $\quad 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

(2) $\quad 2x_1 \qquad\;\; + x_3 = 4$

Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir wählen eine Unbekannte frei:

$x_3 = t$

(2) $\quad 2x_1 \qquad + t = 4$

$\quad x_1 = 2 - \frac{1}{2}t$

$x_1; x_3 \rightarrow \ (1)$

(1) $\quad 4 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}t\right) + 2x_2 + t = 4$

$\quad 8 - 2t + 2x_2 + t = 4$

$\quad 8 - t + 2x_2 = 4 \qquad | \quad -8; \ +t$

$\quad 2x_2 = -4 + t \qquad | \quad :2$

$\quad x_2 = -2 + \frac{1}{2}t$

Lösungsvektor:

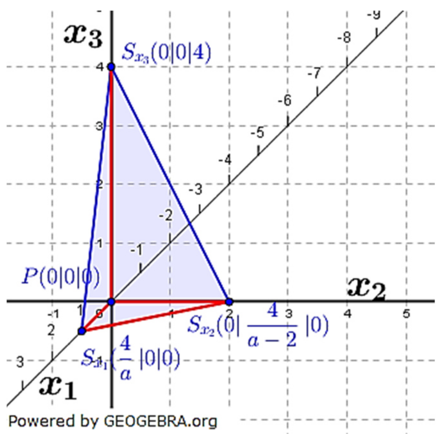
$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t \\ -2 + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$s: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) *Wert von a für Schnitt aller Koordinatenachsen:*

Damit die Ebene alle drei Koordinatenachsen schneidet, darf sie zu keiner Koordinatenachse parallel sein.
Eine Ebene ist parallel zu einer Koordinatenachse, wenn mindestens eine Koordinate des Normalenvektors Null ergibt. Dies ist der Fall für $a = 0$ oder $a = 2$. Somit gilt: $a \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$ der Fall.

Dreieckspyramide mit Volumen $6\,VE$:



$ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4 \qquad | \quad :4$

$\frac{x_1}{\frac{4}{a}} + \frac{x_2}{\frac{4}{a-2}} + \frac{x_3}{4} = 1$

$S_{x_1}\left(\frac{4}{a}|0|0\right); \quad S_{x_2}\left(0\left|\frac{4}{a-2}\right|0\right); \quad S_{x_3}(0|0|4)$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Die Grundfläche ist das rechtwinklige Dreieck $PS_{x_1}S_{x_2}$, die Höhe ist die Strecke $\overline{PS_{x_3}} = 4$.

$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a-2} = \frac{8}{a(a-2)}$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{a(a-2)} \cdot 4 = \frac{32}{3a(a-2)}$

V_{Pyr} soll nach Aufgabenstellung $6\,VE$ groß sein.

$\frac{32}{3a(a-2)} = 6 \qquad | \quad \cdot 3a(a-2)$

$32 = 18 \cdot a(a-2) \qquad | \quad :18$

$\frac{16}{9} = a^2 - 2a \qquad | \quad -\frac{16}{9}$

$a^2 - 2a - \frac{16}{9} = 0$

$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = 1 \pm \frac{5}{3}$

$a_1 = \frac{8}{3}; \quad a_2 = -\frac{2}{3}$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2018 BW

c) *Wert für a, sodass Abstand zu $P(0|0|1)$ maximal wird:*

$\frac{|ax_1+(a-2)x_2+x_3-4|}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}}=0$ | HNF

$\frac{|1-4|}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}}=d(a)$

$d(a)=\frac{|-3|}{\sqrt{2a^2-4a+5}}$

$d^2(a)=\frac{9}{2a^2-4a+5}$

$d^{2\prime}(a)=\frac{-9(4a-4)}{(2a^2-4a+5)^2}$

Maximum über $d^{2\prime}(a)=0$

$-36a+36=0$

$a=1$

$d(1)=\frac{|-3|}{\sqrt{2\cdot1^2-4\cdot1+5}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2-4+5}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Die Ebene E_1 hat mit $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,LE$ den größten Abstand zum Punkt $P(0|0|1)$.

Begründung Schar enthält keine parallelen Ebenen:

Die Normalenvektoren paralleler müssen ein Vielfaches voneinander sein. E_a hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{E_a}}=\begin{pmatrix}a\\a-2\\1\end{pmatrix}$. Eine parallele Ebene E_b hätte den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{E_b}}=\begin{pmatrix}b\\b-2\\1\end{pmatrix}$; $b\neq a$.

Nun müsste gelten: $\begin{pmatrix}b\\b-2\\1\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}a\\a-2\\1\end{pmatrix}$. Aus der x_3-Koordinate ergibt sich ein $k=1$. Somit müsste die x_1-Koordinate $b=1\cdot a$ sein, was durch die Aufgabenstellung jedoch ausgeschlossen ist.

Die Ebenenschar hat keine parallelen Ebenen.