Abituraufgaben allgemeinbildendes Gymnasium

Wahlteile Analytische Geometrie ab 2004

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis Wahlteile analytische Geometrie

Abiturprüfungen Wahlteile analytische Geometrie

	Seite
Wahlteil 2004	
Aufgaben	04
Lösungen	05
Wahlteil 2005	
Aufgaben	09
Lösungen	10
Wahlteil 2006	
Aufgaben	15
Lösungen	16
Wahlteil 2007	
Aufgaben	21
Lösungen	23
Wahlteil 2008	
Aufgaben	29
Lösungen	31
Wahlteil 2009	
Aufgaben	35
Lösungen	37
Wahlteil 2010	
Aufgaben	42
Lösungen	43
Wahlteil 2011	
Aufgaben	49
Lösungen	50
Wahlteil 2012	
Aufgaben	55
Lösungen	56
Wahlteil 2013	
Aufgaben	62
Lösungen	63
Wahlteil 2014	
Aufgaben	66
Lösungen	67
Wahlteil 2015	
Aufgaben	72
Lösungen	74

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Wahlteil 2016
Aufgaben 78
Lösungen 79
Wahlteil 2017
Aufgaben 84
Lösungen 86
Wahlteil 2018
Aufgaben 90
Lösungen 92

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

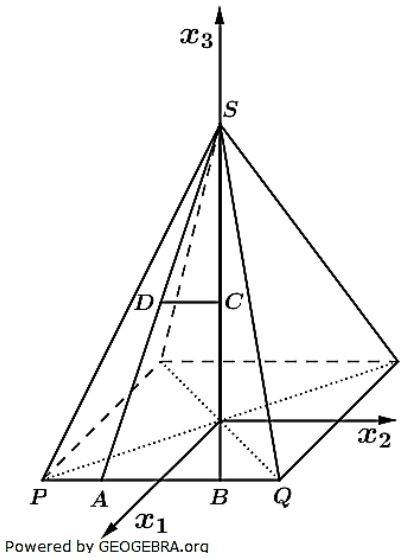
Aufgabe B1

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Längen der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils $2{,}0\,m$.

a) Benachbarte Seitenfläche bilden einen stumpfen Winkel. Wie groß ist dieser?

b) In der Vorderfläche PQS befindet sich eine Einstiegsöffnung $ABCD$ in Form eines symmetrischen Trapezes. C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS. Die Strecke AB hat die Länge $1\,m$. Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?

c) Zur Beleuchtung wird im Zelt eine Lampe aufgehängt, die im Folgenden als punktförmige Lichtquelle betrachtet werden soll. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild $ABC'D'$ der Einstiegsöffnung als „Lichtteppich".
Berechnen Sie die Länge der Strecke $C'D'$, wenn sich die Lampe $25\,cm$ unter der Zeltspitze befindet.



Aufgabe B2.1

Gegeben sind die Punkte $A(10|0|0)$ und $B(0|10|0)$ sowie für jedes $a > 0$ eine Ebene $E_a: a \cdot x_1 - x_3 = 0$.

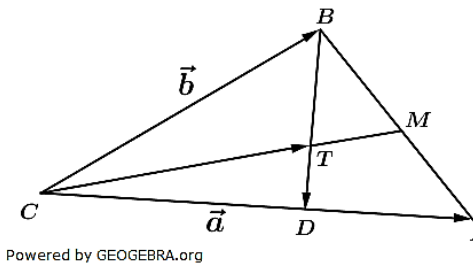
a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E_3.
Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a. Bestimmen Sie seine Koordinaten.
(Teilergebnis: $D_a = \left(\frac{10}{1+a^2}|0|\frac{10a}{1+a^2}\right)$

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a > 0$ rechtwinklig ist.

Aufgabe B 2.2

(nicht mehr prüfungsrelevant)

Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. M ist die Mitte der Strecke AB. T teilt die Strecke CM im Verhältnis $3:1$. Die Strecke BD verläuft durch T.
In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch T geteilt?



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie 2004 BW

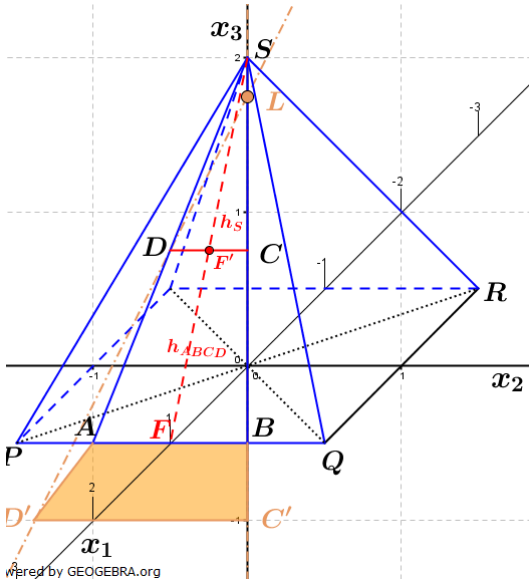
Lösung B1

Lösungslogik

a) *Stumpfer Winkel zwischen zwei Seitendreiecken:*
Die zwei Seitendreiecke liegen je in einer Ebene, der Schnittwinkel der beiden Ebenen, z. B. die Ebene PQS und die Ebene QRS (der Eckpunkt R muss noch bestimmt werden) ergibt sich dann aus den beiden Normalenvektoren der beiden Ebenen. Achtung!!! Die Formel liefert den spitzen Winkel, wir müssen also noch die Ergänzung zu $180°$ bilden.

b) *Prozentualer Anteil der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche:*
Es wird die Flächenformel für ein Trapez benötigt, hierzu müssen wir allerdings noch die Höhe des Trapezes bestimmen, z.B. über die Strecke $\overline{FF'}$. Weiterhin benötigen wir die Fläche des Dreiecks PQS, die wir über den Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PS}$ ermitteln. Das prozentuale Verhältnis ist den $\frac{A_{Trapez}}{A_{PQS}}$.

c) *Länge der Strecke $C'D'$:*
Der Punkt D' ist der Spurpunkt der Geraden durch L und D mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
Der Punkt C' ist der Spurpunkt der Geraden durch L und C mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
Die Länge von $\overline{C'D'}$ entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{C'D'}$.



Klausuraufschrieb

Bestimmung der Koordinaten der Punkte:
$P(1|-1|0)$; $Q(1|1|0)$; $R(-1|1|0)$; $S(0|0|2)$
$L(0|0|1{,}75)$; $A(1|-0{,}5|0)$; $B(1|0{,}5|0)$; $F(1|0|0)$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}25\\1\end{pmatrix} \Rightarrow C(0{,}5|-0{,}25|1)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-0{,}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}25\\1\end{pmatrix} \Rightarrow D(0{,}5|0{,}25|1)$$

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow F'(0{,}5|0|1)$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2004 BW

a) *Stumpfer Winkel zwischen zwei Seitendreiecken:*

$\sphericalangle(E_{PQS}, E_{QRS}) = \varphi$

$cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{E_{PQS}}} \circ \overrightarrow{n_{E_{QRS}}}|}{|\overrightarrow{n_{E_{PQS}}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_{QRS}}}|}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{PQS}}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{PQS}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{QRS}}} = \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{QRS}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}46\,°$

$\varphi^* = 180° - 78{,}46° \approx 101{,}5\,°$

Der stumpfe Winkel benachbarter Seitenflächen ist $101{,}5\,°$ *groß.*

b) *Prozentualer Anteil der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche:*

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h_{ABCD}$

$\overline{AB} = 1; \quad \overline{CD} = 0{,}5; \quad h_{ABCD} = |\overrightarrow{FF'}| = \sqrt{0{,}5^2 + 1} = \sqrt{1{,}25}$

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}25} = 0{,}75 \cdot \sqrt{1{,}25}$

$A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 + 4} = \sqrt{5}$

$\frac{A_{ABCD}}{A_{PQS}} = \frac{0{,}75 \cdot \sqrt{1{,}25}}{\sqrt{5}} = 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$

Die Einstiegsöffnung beansprucht $37{,}5\,\%$ *der Vorderfläche.*

c) *Länge der Strecke* $C'D'$*:*

C' ist Spurpunkt der Geraden durch L und C mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
D' ist Spurpunkt der Geraden durch L und D mit der x_1x_2–Koordinatenebene.

$g_{\overline{LC}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$x_{3_{C'}} = 0 = 1{,}75 - 0{,}75t \Rightarrow t = \frac{7}{3}$

$C'\left(\frac{7}{6} \middle| -\frac{7}{12} \middle| 0\right)$

$g_{\overline{LD}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$x_{3_{D'}} = 0 = 1{,}75 - 0{,}75t \Rightarrow t = \frac{7}{3}$

$D'\left(\frac{7}{6} \middle| \frac{7}{12} \middle| 0\right)$

$\overline{C'D'} = \frac{7}{6}$

Die Strecke $\overline{C'D'}$ *ist* $\frac{7}{6}$ LE *lang.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Lage von E_3:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinaten des Punktes D_a:
Die Gerade g_a durch A hat als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene E_a. Wir bilden $g_a \cap E_a$ und erhalten damit die Koordinaten des Punktes D_a.

b) *Nachweis, dass jedes Dreieck ABD_a rechtwinklig ist:*
Wir weisen nach, dass $\overrightarrow{D_aA} \circ \overrightarrow{D_aB}$ für jedes $a > 0$ stets 0 ist.

Klausuraufschrieb

a) *Lage von E_3:*
E_3: $3x_1 - x_3 = 0$
In der Ebenengleichung fehlt die x_2–Koordinate. Folglich ist die Ebene parallel zur x_2–Achse. Da E_3 durch den Ursprung verläuft, verläuft die x_2–Achse in der Ebene.
Koordinaten des Punktes D_a:

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

$g_a \cap E_a$
Aus g_a folgt:
$x_1 = 10 + ra; \quad x_3 = -r$
E_a: $a(10 + ra) + r = 0$
$ra^2 + r + 10a = 0$
$r(a^2 + 1) = -10a$
$r = -\frac{10a}{a^2+1}$

$$\overrightarrow{OD_a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10a}{a^2+1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2+10}{a^2+1} - \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $D_a\left(\frac{10}{a^2+1} \middle| 0 \middle| \frac{10a}{a^2+1}\right)$.

b) *Nachweis, dass jedes Dreieck ABD_a rechtwinklig ist:*

$$\overrightarrow{D_aA} = \begin{pmatrix} 10 - \frac{10}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{a^2+1} \\ 10 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_a} \circ \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\frac{10}{a^2+1} \\ 10 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = -\frac{100a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{100a^2}{(a^2+1)^2} = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AD_a} \circ \overrightarrow{BD_a} = 0$ für alle $a \neq 0$ ist das Dreieck ABD_a stets rechtwinklig.

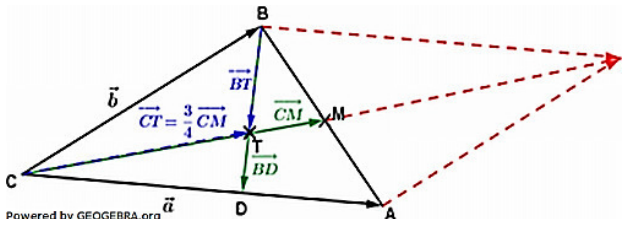
Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Die unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf, deshalb gilt:

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ und somit

$\overrightarrow{CT} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{8}(\vec{a} + \vec{b})$



Wir betrachten den geschlossenen Vektorzug BTC. Es gilt:

$$\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TC} + \vec{b} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{CT} - \vec{b} = \frac{3}{8}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$$

Wir skalieren den Vektor $\vec{a}$ mit s und betrachten den geschlossenen Vektorzug BDC. Es gilt:

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \vec{b} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \vec{b} = s \cdot \vec{a} - \vec{b}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BT}$ ist Teilstück des Vektors $\overrightarrow{BD}$ und wir können schreiben:

$$\overrightarrow{BT} = r \cdot \overrightarrow{BD} = r \cdot (s \cdot \vec{a} - \vec{b})$$

Durch Gleichsetzung erhalten wir:

$$\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b} = r \cdot (s \cdot \vec{a} - \vec{b}) \implies$$
$$\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b} - r \cdot s \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \vec{o} \qquad | \qquad \text{Faktorisieren}$$
$$\vec{a}\left(\frac{3}{8} - rs\right) + \vec{b}\left(r - \frac{5}{8}\right) = \vec{o}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ muss somit gelten:

(1) $\quad \frac{3}{8} - rs = 0$

(2) $\quad r - \frac{5}{8} = 0 \implies r = \frac{5}{8} \longrightarrow (1)$

$\frac{3}{8} - \frac{5}{8}s = 0 \implies s = \frac{3}{5}$

Da $\overrightarrow{BT} = r \cdot \overrightarrow{BD}$ ist dadurch $\overrightarrow{BT} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{TD} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Das Verhältnis $\frac{\overrightarrow{BT}}{\overrightarrow{TD}}$ ergibt somit $\frac{5}{3}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

Gegeben sind eine Pyramide $ABCDS$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$ und $S(4|4|8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_r: $rx_1 + 3x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante BC und schneidet die Kante DS in F und die Kante AS in G.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an. Zeichnen Sie das Viereck $BCFG$ ein.
Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) Bestimmen Sie r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat.
Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur. Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

Aufgabe B2.1

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|3)$ und $B(2|5|3)$ sowie die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

a) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E.
Beschreiben Sie die Lage der Ebene E.
Welchen Abstand hat g von E?

b) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von T.
Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT?
Bestimmen Sie einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

c) Das Dreieck ABC mit $C(2|3|5)$ rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel.
Bestimmen Sie dessen Volumen.

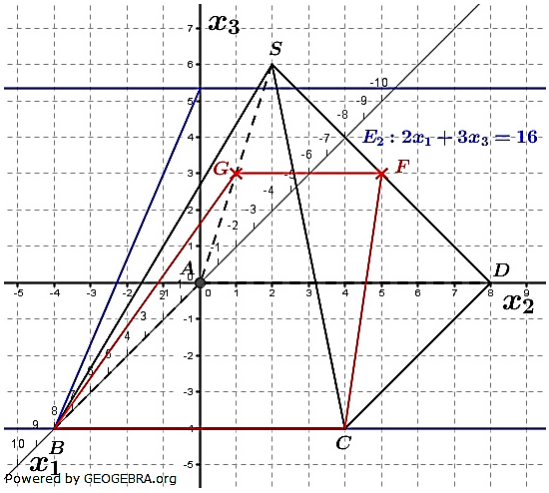
Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Die Punkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken PQ und PR, die Punkte M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken QS und RS. Zeigen Sie, dass $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$ gilt.

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Koordinaten von F und G:*
Wir schneiden die Geraden durch die Punkte D und S bzw. A und S mit der Ebene E_2.
Nachweis gleichschenkliges Trapez $BCFG$:
Nachweis des Trapezes über Parallelität zweier Kanten unterschiedlicher Länge sowie zwei nicht parallele Kanten mit gleicher Länge.
Innenwinkel des Trapezes:
Berechnung der Innenwinkel über die Schnittwinkelformel von Vektoren.



b) *r^* für Abstand Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} gleich 4:*
Berechnung von r^* über die HNF.
Bestimmung des Punktes in E_{r^*} der von S den Abstand 4 hat:
Dies ist der Schnittpunkt der Geraden durch S mit dem Normalenvektor der Ebene E_{r^*} als Richtungsvektor.

c) *Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r:*
Wir bilden $g_{BC} \cap E_r$ und weisen nach, dass das Ergebnis unabhängig von r ist.
Mögliche Schnittfiguren und zugehörige r:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinaten von F und G:*

$F \in g_{DS}$

$$g_{DS}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$E_2 \cap g_{DS}$

$x_1 = k; \quad x_3 = 2k$

$2k + 6k = 16 \implies k = 2$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} \implies F(2|6|4)$$

$G \in g_{AS}$

$$g_{AS}\colon \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} = k^* \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$E_2 \cap g_{AS}$

$x_1 = k; \quad x_3 = 2k$

$2k + 6k = 16 \implies k = 2$

$$\overrightarrow{OG} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} \implies G(2|2|4)$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2005 BW

Nachweis gleichschenkliges Trapez $ABFG$:

Bedingung für Gleichschenkligkeit:

$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{FG} \wedge |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{FG}| \wedge \overrightarrow{BG} \nparallel \overrightarrow{CF} \wedge |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CF}|$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{FG}$

$|\overrightarrow{BC}| = 8; \quad |\overrightarrow{FG}| = 4 \Longrightarrow |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{FG}|$

$\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{BG} \nparallel \overrightarrow{CF}$

$|\overrightarrow{BG}| = \sqrt{56}; \quad |\overrightarrow{CF}| = \sqrt{56} \Longrightarrow |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CF}|$

Alle Bedingungen sind erfüllt, das Viereck $ABFG$ ist ein gleichschenkliges Trapez.

Innenwinkel des Trapezes:

$\sphericalangle(GBC) = \alpha; \quad \sphericalangle(BCF) = \beta = \alpha; \quad \sphericalangle(CFG) = \sphericalangle(BGF) = \gamma = 180° - \alpha$

$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{8 \cdot \sqrt{56}} = \frac{16}{8 \cdot \sqrt{56}}$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{16}{8 \cdot \sqrt{56}}\right) = 74{,}5\,°$

$\gamma = 180° - 74{,}5° = 105{,}5\,°$

Die Innenwinkel des Trapezes betragen $74{,}5\,°$ und $105{,}5\,°$.

b) *r^* für Abstand Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} gleich 4:*

Abstand Punkt Ebene über die HNF:

$h = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$h = 4 = \frac{|4 \cdot r^* + 3 \cdot 8 - 8r^*|}{\sqrt{r^{*2} + 9}}$

$4 \cdot \sqrt{r^{*2} + 9} = |4r^* + 24 - 8r^*| \qquad | \quad :4$

$\sqrt{r^{*2} + 9} = |-r^* + 6| \qquad | \quad ^2$

$r^{*2} + 9 = r^{*2} - 12r^* + 36$

$12r^* = 27$

$r^* = \frac{9}{4}$

Die Pyramidenspitze S hat von der Ebene $E_{\frac{9}{4}}$ den Abstand 4.

Bestimmung des Punktes in E_r, der von S den Abstand 4 hat:

Lotfußpunkt L in $E_{\frac{9}{4}}$:

$g_{SL}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E_{\frac{9}{4}} \cap g_{SL}$

$x_1 = 4 + 3k; \quad x_3 = 8 + 4k$

$\frac{9}{4}(4 + 3k) + 3(8 + 4k) = 18$

$9 + \frac{27}{4}k + 24 + 12k = 18$

$\frac{75}{4}k = -15 \Longrightarrow k = -\frac{4}{5}$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ 4 \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$

Der Punkt $L \in E_{\frac{9}{4}}$ hat die Koordinaten $L\left(\frac{8}{5}|4|\frac{24}{5}\right)$.

c) *Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r:*

$g_{BC}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_r \cap g_{BC}$

$x_1 = 8; \quad x_3 = 0$

$8r + 0 = 8r$ | wahre Aussage

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, also $g_{BC} \in E_r$, die Gerade g_{BC} ist die Schnittgerade aller E_r

Mögliche Schnittfiguren und zugehörige r:

Wie wir soeben gesehen haben, dreht sich E_r um die Gerade BC. Ist $r = 0$, so beschreibt E_0 die x_1x_2–Ebene mit $E_0\colon x_3 = 0$. Die Schnittfläche ist die Grundfläche der Pyramide, ein Quadrat.

Liegt der Punkt S in der Ebene, ist die Schnittfläche das gleichseitige Dreieck der Vorderseite der Pyramide. Wir errechnen hierfür r mit

$r \cdot x_{1_S} + 3 \cdot x_{3_S} = 8r$

$r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8r \quad \Rightarrow \quad r = 6$

Für alle Werte $0 < r < 6$ ist die Schnittfigur ein gleichseitiges Trapez.

Wir fassen zusammen:

Die Ebene E_r schneidet die Pyramide:

- für $r = 0$ in einem Quadrat
- für $0 < r < 6$ in einem gleichseitigen Trapez
- für $r = 6$ in einem gleichschenkligen Dreieck
- für $r < 0 \vee r > 6$ in der Strecke BC.

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Gleichung der Ebene E:*

Aufpunkt von E ist der Punkt A, ein Richtungsvektor ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$, der zweite Richtungsvektor ist der Richtungsvektor der Geraden, da $g \parallel E$ sein soll.

Lagebeschreibung von E:

Siehe Klausuraufschrieb.

Abstand g von E:

Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Koordinaten des Punktes T:*

$\overrightarrow{AT} \circ \overrightarrow{BT} = 0$ (wegen Rechtwinkligkeit) führt zu den Koordinaten von T.

Flächeninhalt Dreieck ABT:

Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AT}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BT}\right|$

Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat:

Da das Dreieck ABT rechtwinklig ist, ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ der Punkt mit dem gleichen Abstand zu den Eckpunkten des Dreiecks (Thaleskreis).

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) *Volumen des Doppelkegels:*
Bestimmung des Abstandes von C zur Geraden g_{AB} entspricht dem Radius des Grundkreises des Doppelkegels. Der Fußpunkt L der Hilfsebene durch C mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor ergibt die einzelnen Höhen der Teilkegel. Die Strecke AL ist die Höhe des einen Kegels, die Strecke LB die Höhe des zweiten Kegels. Das Volumen errechnet sich somit aus: $V_{Doppelkeg} = \frac{1}{3}\pi\left|\overrightarrow{LC}\right|^2 \cdot \left(\left|\overrightarrow{AL}\right| + \left|\overrightarrow{LB}\right|\right)$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Gleichung der Ebene E:*
$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{rv_g}$

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ s^*, t \in \mathbb{R}$$

Lagebeschreibung von E:
Die Ebene E verläuft parallel zur x_1x_2–Ebene im Abstand $x_{3_E} = 3$, da die x_3–Komponenten der beiden Richtungsvektoren 0 sind.
Abstand g von E:
Wegen $g \parallel E$ und $x_{3_g} = 5$ hat die Gerade einen Abstand von $x_{3_g} - x_{3_E} = 5 - 3 = 2$ zur Ebene E.

b) *Koordinaten des Punktes T:*
Bedingung für rechten Winkel:
$\overrightarrow{AT} \circ \overrightarrow{BT} = 0$

$$\begin{pmatrix}5+r-2\\3-1\\5-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5+r-2\\3-5\\5-3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}3+r\\2\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3+r\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

$(3+r)^2 - 4 + 4 = 0 \implies r = -3$

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $T(2|3|5)$.
Flächeninhalt Dreieck ABT:

$$A_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 4$$

Die Fläche des Dreiecks ABT beträgt $4\ FE$.
Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat:
Wegen Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABT ist dieser Punkt der Mittelpunkt des Thaleskreises über der Strecke $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $M(2|3|3)$.

c) *Volumen des Doppelkegels:*

Abstand von C zur Geraden g_{AB} ist Radius des Grundkreises des Doppelkegels. Da zum einen der gegebene Punkt C mit dem in Teilaufgabe b) errechneten Punkt M übereinstimmt, zum anderen wegen $|\overrightarrow{AT}| = |\overrightarrow{BT}| = \sqrt{8}$ das Dreieck ABC gleichschenklig, rechtwinklig ist, ist Punkt M aus Teilaufgabe b) der Lotfußpunkt von C auf $\overline{AB}$. Somit ist der Radius des Grundkreises des Doppelkegels $r = |\overrightarrow{MC}|$.

$$r = |\overrightarrow{MC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right| = 2$$

Die Höhen der Kegelhälften sind $h_1 = |\overrightarrow{AM}|$ und $h_2 = |\overrightarrow{BM}|$.

$$V_{Doppelkeg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (h_1 + h_2)$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot \left(\left|\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}\right|\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{4} = \frac{16}{3}\pi$$

Das Volumen des Doppelkegels beträgt $\frac{16}{3}\pi\, VE$.

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

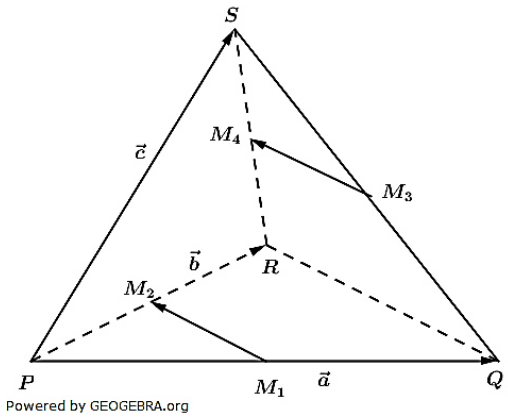
Behauptung: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$

Wir wählen zunächst die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{PS} = \vec{c}$. Nun gilt:

$\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Mit $\overrightarrow{QS} = -\vec{a} + \vec{c}$ und $\overrightarrow{RS} = -\vec{b} + \vec{c}$ erhalten wir weiter:

$$\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(-\vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c})$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1.1

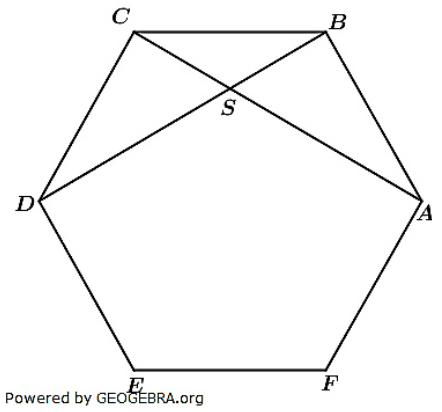
Die Punkte $A(3|5|-4)$, $B(4|1|4)$ und $D(-4|9|0)$ legen eine Ebene E fest.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M dieser Raute.
(Teilergebnisse: $E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$; $M(0|5|2)$)

b) Gegeben ist ein weiterer Punkt $S(8|15|6)$.
Die Raute $ABCD$ bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide. Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.
Der Pyramide wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene E liegt.
Berechnen Sie das Volumen dieses Kreiskegels.

Aufgabe B1.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Gegeben ist das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen.



Aufgabe B2

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden.
Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.
Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck $ABCD$ mit

$A(0|0|0)$, $B(6|6|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(-8|4|0)$

und als Deckfläche das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ mit

$A^*(4|1|20)$, $B^*(7|4|20)$ und $C^*(4|10|20)$

(Koordinatenangaben in Meter).

a) Zeigen Sie, dass $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D^*.
Zeichnen Sie den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein.

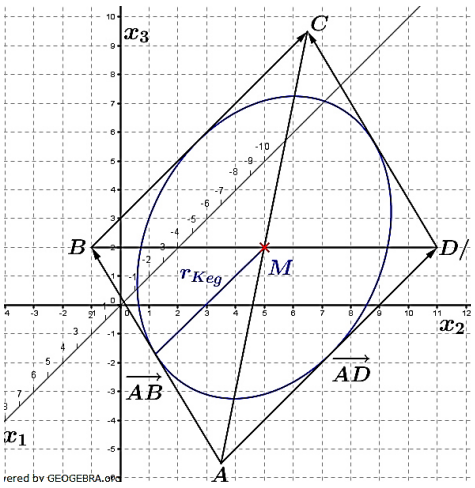
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wand ABB^*A^*.
Untersuchen Sie, ob die Wand ABB^*A^* nach außen überhängt.

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bilden den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ und machen dann eine Punktprobe mit A.
Gleichschenkliges Dreieck ABD:
Für das Dreieck muss gelten, dass nur zwei der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BD}$ gleich lang sind.
Koordinaten von C für Viereck $ABCD$ als Raute:
Über die Linearkombination $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M der Raute:
Dies ist die Streckenmitte des Vektors $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$

b) *Volumen der Pyramide:*
Berechnung über das Spatprodukt, siehe Klausuraufschrieb.
Volumen des eingeschriebenen Kreiskegels:
Die Situation ergibt sich aus nebenstehender Grafik. Wegen der räumlichen Darstellung, fallen der Punkt D und S in der Grafik zusammen.
Der Grundkreis des Kreiskegels liegt in der Raute. Der Radius des Kreiskegels ist der Abstand des Punktes M von z.B. der Strecke $\overline{AB}$. Berechnung des Volumens über $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_e} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{n_e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = d$
$E\colon\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = d \implies d = 29$ | Punktprobe mit A
$E\colon\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$
Gleichschenkliges Dreieck ABD:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 9; \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 9; \quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 12$$

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| \neq \left|\overrightarrow{BD}\right|$ ist das Dreieck ABD gleichschenklig und nicht gleichseitig.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Koordinaten von C für Viereck $ABCD$ als Raute:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C hat die Koordinaten $C(-3|5|8)$

Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M der Raute:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts sind $M(0|5|2)$.

b) *Volumen der Pyramide:*

Das Volumen einer 4–seitigen Pyramide bestimmt sich aus dem dritten Teil des Spatproduktes aus zwei Grundseitenvektoren ($\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$) und dem Seitenkantenvektor ($\overrightarrow{AS}$).

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right|; \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \text{ (sieheTeilaufgabe a))}$$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot |-240 - 600 - 240| = \frac{1}{3} \cdot 1080 = 360$$

Das Volumen der Pyramide beträgt $360\ VE$.

Alternativ:

In der Volumenformel einer Pyramide $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ ist h der senkrechte Abstand der Pyramidenspitze zur Grundfläche. Die Ebenengleichung ist in Teilaufgabe a) bereits erstellt, der Abstand von S zu E errechnet sich über die HNF.

$$h = \frac{|4 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 2 * 6 - 29|}{\sqrt{16+25+4}} = \frac{90}{\sqrt{45}} = 2 \cdot \sqrt{45}.$$

Die Grundfläche ist gleich dem Betrag des Kreuzproduktes von

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

$$G = \left|\begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-12)^2 \cdot (4^2 + 5^2 + 2^2)} = 12 \cdot \sqrt{45}$$

Somit erhalten wir $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{45} \cdot 2 \cdot \sqrt{45} = 8 \cdot 45 = 360$.

Es geht aber noch umständlicher:

Die Grundfläche der Pyramide ist eine Raute. Die Fläche einer Raute errechnet sich aus $A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ mit e und f als den Diagonallängen, also

$$A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} \cdot 12 = 6 \cdot \sqrt{4 \cdot 45}$$

$$A_{Raute} = 12 \cdot \sqrt{45}.$$

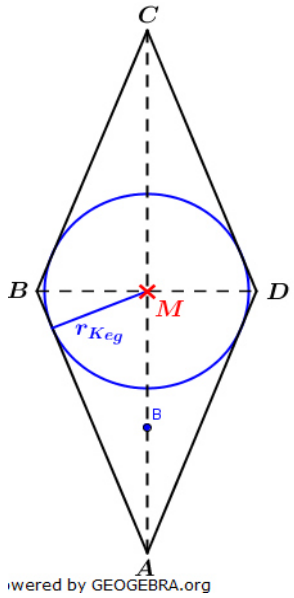
Entscheiden Sie selbst, welchen Lösungsweg Sie wählen.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Volumen des eingeschriebenen Kegels:

$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

r ist der Radius des Grundkreises. h ist der senkrechte Abstand der Kegelspitze zum Grundkreis. Die Situation der Grundfläche ergibt sich aus nebenstehender Grafik. Der Radius des „einbeschriebenen" Grundkreises ist der kürzeste Abstand des bereits ermittelten Schnittpunktes M der beiden Diagonalen von den Seitenkanten der Raute. Wir können r_{Keg} berechnen über den Abstand des Punktes M von der Geraden durch A und B.



g_{AB}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Für die Abstandsberechnung führen wir hier keinesfalls die umständliche Rechenweise über eine Hilfsebene durch M mit dem Richtungsvektor von g_{AB} als Normalenvektor aus. Wir verwenden die einfache Abstandsformel eines Punktes zu einer Geraden:

$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ Hieraus ergibt sich:

$$r_{Keg} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{81}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{\sqrt{1620}}{9} = \frac{\sqrt{81 \cdot 20}}{9} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Für die Höhe h müssen wir den Abstand des Punktes S von der Ebene E über die HNF ermitteln. Dies ist zuvor unter „alternativ" für die Pyramide bereits geschehen, wir haben $h = 2 \cdot \sqrt{45}$ festgestellt. Somit ergibt sich für das Volumen des Kegels:

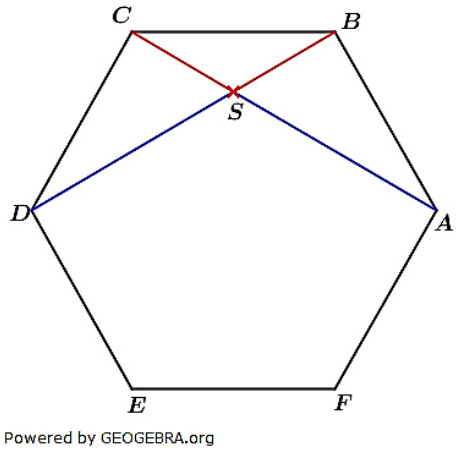
$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \sqrt{5}\right)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{45} = \frac{40}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{45} = 40\pi\sqrt{5} = 281$

Das Volumen des eingeschriebenen Kegels beträgt $281\,VE$.

Lösung B1.2

Klausuraufschrieb

In einem regelmäßigen Sechseck sind die sechs Innendreiecke, die von den Diagonalen gebildet werden, gleichseitige Dreiecke. Somit ist z. B. die Strecke $\overline{DA}$ doppelt so lang wie die Seite $\overline{CB}$.



Unter Anwendung des 2. Strahlensatzes können wir also bilden:

$\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$

Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ teilen sich im Verhältnis 1:2

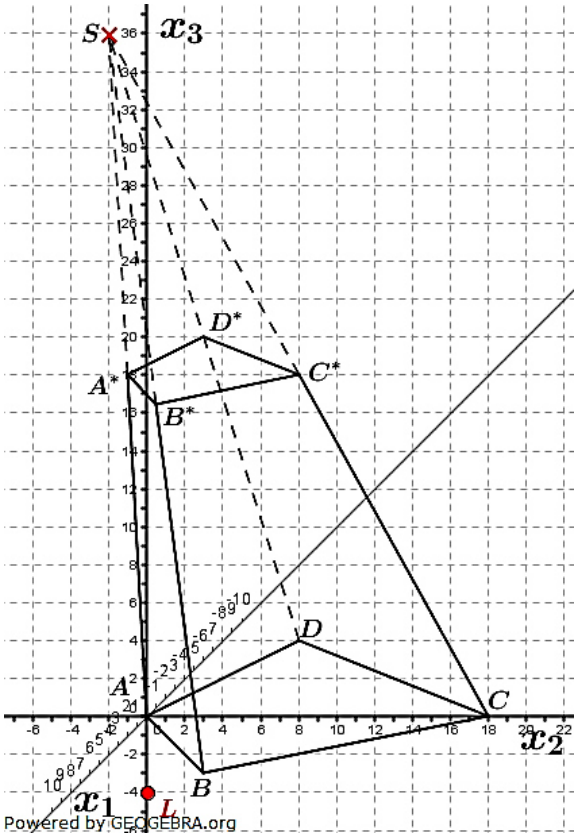
Die Berechnung über eine Linearkombination zweier Vektoren ist hier aufwändig und fehleranfällig und soll deshalb hier nicht näher erläutert werden.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Spitze S der ursprünglichen Pyramide:*
Nachweis, dass S der Schnittpunkt der Geraden durch A und A^* sowie B und B^* ist.
Koordinaten von D^*:
Für D^* muss gelten, dass die x_3–Koordinate gleich groß mit den x_3–Koordinaten von A^*, B^* bzw. C^*, also $x_{3_{D^*}} = 20$ sein muss. Der Punkt liegt auf der Geraden durch D und S.
Zeichnung in Koordinatensystem:
Siehe Grafik rechts.



b) *Flächeninhalt von ABB^*A^*:*
Wir untersuchen zunächst die Form der Fläche ABB^*A^*. Es zeigt sich, dass die Fläche ein nicht gleichschenkliges Trapez ist. Die Berechnung der Fläche erfolgt dann über die Trapezformel.
Überhang der Wand ABB^*A^* nach außen:
Die Wand ABB^*A^* hängt dann über, wenn der Lotfußpunkt der zum Viereck $ABCD$ orthogonalen Geraden durch den Punkt S außerhalb des Vierecks liegt.
Die x_3–Koordinaten der Punkte A, B, C und D sind alle gleich 0, d.h., der Normalenvektor der Ebene, in der die Grundfläche liegt ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Klausuraufschrieb

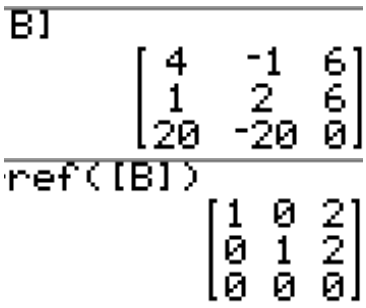
a) *Spitze S der ursprünglichen Pyramide:*

g_{AA^*}: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$

g_{BB^*}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$

$g_{AA^*} \cap g_{BB^*}$

$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$



Die Lösung des LGS mit dem GTR führt zu $r = 2$ und $s = 2$.

$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix}$

Die Spitze hat die Koordinaten $S(8|2|40)$. **q.e.d.**

Koordinaten von D^*:

Dieser Punkt liegt auf der Geraden durch D und S und hat die x_3–Koordinate 20.

$$g_{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 20 = 40t \implies t = 0{,}5$$

$$\overrightarrow{OD^*} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $D^*(0|3|20)$

b) *Flächeninhalt der Wand ABB^*A^*:*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A^*B^*}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{72}; \quad \left|\overrightarrow{A^*B^*}\right| = \sqrt{18}$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{A^*B^*}\right| \implies$ Das Viereck ABB^*A^* ist ein Trapez.

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{A^*B^*}\right|\right) \cdot h$$

Die Höhe h ist gleich dem Abstand des Punktes A^* von der Geraden durch A und B.

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA^*}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{72}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 120 \\ -120 \\ -18 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{29124}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{809}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}}$$

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}} = 4{,}5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}} = 4{,}5 \cdot \sqrt{809} = 128$$

Die Fläche der Wand ABB^*A^* beträgt $128\,m^2$.

Überhang der Wand ABB^*A^*:

Die Grundfläche liegt in der x_1x_2–Ebene. Der Normalenvektor ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gleichung der Gerade durch S orthogonal zur Grundfläche:

$$g_{SG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ist gleich dem Spurpunkt der Geraden mit der x_1x_2–Ebene.

$$x_3 = 0 = 40 + t \implies t = -40$$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} - 40 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies L(8|2|0)$$

Aus der Grafik erkennen wir, dass dieser Punkt nicht innerhalb des Vierecks $ABCD$ liegt, also hängt die Wand ABB^*A^* über0.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1.1

Die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.
Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein $80\,m$ hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene. ($1\,LE$ entspricht $10\,m$)

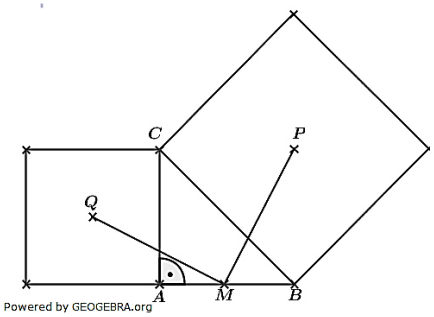
a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.
Der Sendermast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$.
Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

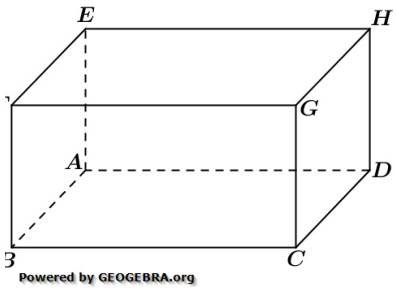
Aufgabe B1.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig, P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB.
Beweisen Sie, dass die Strecken MP und MQ orthogonal und gleich lang sind.



Aufgabe B2

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(3|0|0)$, $D(0|5|0)$ und $F(3|0|4)$ festgelegt.
Die Fläche $EFGH$ stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar. Dieser ist drehbar um die Kante EH.
Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene gegeben durch die Gleichung E: $tx_1 - x_3 = -4$.



a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste?
Liegt der Deckel in einer Ebene E_t, wenn er um $90\,°$ geöffnet ist?

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt?
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel $60\,°$ beträgt?
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90°$.

d) Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0|2{,}5|20)$ beleuchtet die Kiste. Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Für die Darstellung der Ebene wandeln wir die Koordinatengleichung in die Achsenabschnittsgleichung um und bestimmen daraus die drei Spurpunkte. Siehe Grafik.
Neigungswinkel α des Hangs:
α ist der spitze Winkel, den die gegebene Ebene E mit der x_1x_2–Koordinatenebene einschließt. Berechnung über die Formel für Schnittwinkel von Vektoren mit den Normalenvektoren der beiden Ebenen.
Verankerungspunkt V am Hang:
Dies ist der Schnittpunkt der Geraden durch die halbe Mastlänge mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor und der Ebene E.
Länge des Stahlseils:
Dies ist die Strecke zwischen der halben Mastspitze und dem Punkt V.

b) *Beschreibung:*
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Höhe, in der der Mast abgeknickt ist:*
Die Strecke $\overline{HK}+\overline{KR}$ entspricht der Länge des Mastes von $8\,m$.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:

E: $\frac{x_1}{8}+\frac{x_2}{8}+\frac{x_3}{4}=1$

$S_{x_1}(8|0|0)$; $S_{x_2}(0|8|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$

Neigungswinkel des Hangs:
Spitzer Winkel zwischen der x_1x_2–Koordinatenebene und der Ebene E.

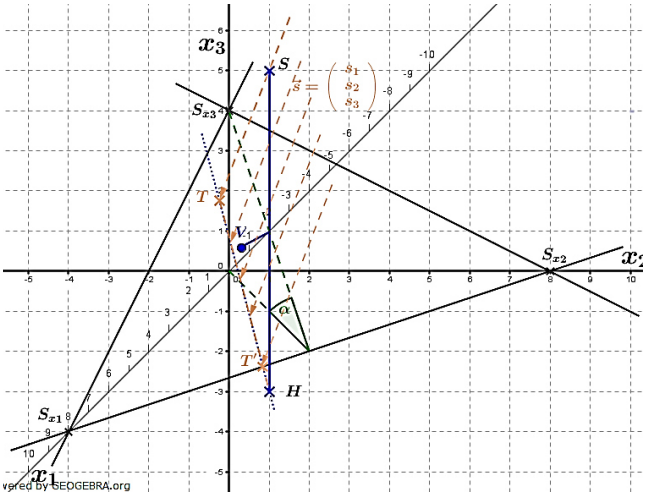
$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}$

$cos\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\alpha=cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)\approx 35{,}26\,°$

Der Neigungswinkel des Hanges beträgt etwa $35{,}3\,°$.



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

Verankerungspunkt V:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$

$x_1 = 6 + k; \quad x_2 = 4 + k; \quad x_3 = 4 + 2k$

$6 + k + 4 + k + 2 \cdot (4 + 2k) = 8$

$18 + 6k = 8 \implies k = -\frac{5}{3}$

$$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Verankerungspunktes sind $V\left(\frac{13}{3} \middle| \frac{7}{3} \middle| \frac{2}{3}\right)$.

Länge des Stahlseils:

$$l = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3}\sqrt{150} \approx 4{,}08$$

Das Stahlseil ist etwa $40{,}8\ m$ lang.

b) *Berechnung der Gesamtlänge des Schattens:*

Die Richtung der Lichtstrahlen ist gegeben durch die Verbindung der Spitze S des Mastes mit dem Schattenpunkt T.
Der Schatten des Mastes verläuft von H zu einem Punkt T' auf der Spurgeraden S_1S_2 der Ebene E und von dort zum Punkt T.
T liegt außerdem in der Schattenebene E^* des Mastes.
Rechenschritte:

1) Schnittpunkt T der Geraden durch S und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen mit der Ebene E bestimmen.
2) Gleichung der Geraden s_{12} durch S_{x_1} und S_{x_2} aufstellen.
3) Gleichung der Ebene E^* durch S mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{SH}$ und $\overrightarrow{ST}$ aufstellen.
4) Schnittpunkt T' der Geraden s_{12} mit der Ebene E^* bestimmen.
5) Die Längen der Strecken $\overline{HT'}$ und $\overline{T'T}$ berechnen.
   $\left|\overrightarrow{HT'}\right| + \left|\overrightarrow{T'T}\right|$ ist die Gesamtlänge des Schattens.

c) *Höhe, in der der Mast abgeknickt ist:*

$\left|\overrightarrow{HK}\right| + \left|\overrightarrow{KR}\right| = 8$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2-k \end{pmatrix} \right| = 8$$

$k + \sqrt{20 + 4 - 4k + k^2} = 8$

$\sqrt{24 - 4k + k^2} = 8 - k \qquad | \quad ^2$

$k^2 - 4k + 24 = k^2 - 16k + 64$

$12k = 40 \implies k = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$

Der Mast knickt in einer Höhe von $33{,}3\ m$ um.

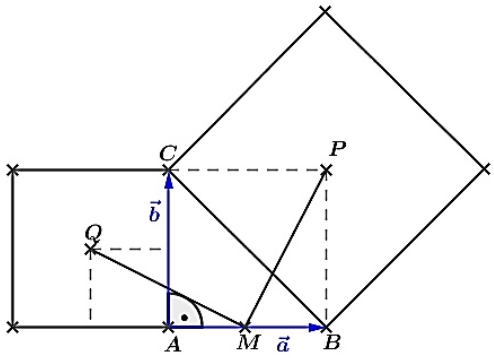
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1.2

Klausuraufschrieb

Da das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, gilt für die Vektoren:
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ sowie $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.
Das Viereck $ABPC$ ist ein Quadrat, da die Winkel ABC und ACB jeweils $45°$ sind.
Damit ergibt sich:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \quad \text{und}$$
$$\overrightarrow{MQ} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$



Nachweis der Orthogonalität:

$$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}^2 = 0$$

Die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind somit orthogonal.
Streckenlängen:

$$\overrightarrow{MP} = \sqrt{\overrightarrow{MP}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2}$$
$$\overrightarrow{MQ} = \sqrt{\overrightarrow{MQ}^2} = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2}$$

Gemäß Aufgabenstellung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Länge d, d.h. es gilt:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = d \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = d^2$$

Damit sehen wir:

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot d^2} = |\overrightarrow{MQ}|$$

Die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind somit gleich lang.

Lösung B3

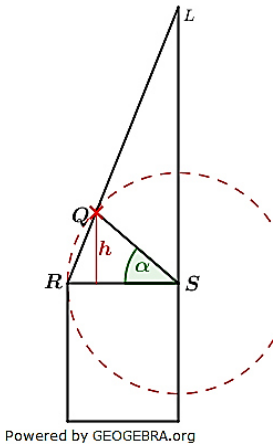
Klausuraufschrieb

a) *Abstand zwischen den Kanten AB und GH:*
Der Abstand entspricht der Diagonalen des Rechtecks $BCGF$ bzw. $ADHE$.
Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t:
Wir bilden $E_t \cap g_{EH}$ und prüfen, ob das Ergebnis unabhängig von t ist.
E_t bei geschlossenem Deckel:
Der geschlossene Deckel liegt in der Parallelebene zur x_1x_2–Koordinatenebene im Abstand $\overline{AE}$.
E_t bei um 90° geöffneten Deckel:
Der um $90°$ geöffnete Deckel liegt in der x_2x_3–Koordinatenebene.

b) *Koordinaten von Punkt P:*
Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Geraden durch $\frac{\overline{FE}}{2}$ mit dem Normalenvektor von E_2 als Richtungsvektor mit der Ebene E_2

c) *Öffnungswinkel für E_2:*
Dies ist der spitze Winkel, den E_2 mit der x_1x_2–Koordinatenebene einschließt.
E_t für Öffnungswinkel $\alpha = 60°$:
Öffnungswinkel $60°$ bedeutet, dass die Winkelberechnung zwischen E_t und der x_1x_2–Koordinatenebene den Wert $0{,}5$ hat.
Ermittlung von t für Öffnungswinkel $0° \leq \alpha < 90°$
Für $\alpha < 90°$ gilt, dass $0 \leq cos\alpha \leq 1$ sein muss.

d) *Maximaler Öffnungswinkel der Kiste:*
Die Lampe ist in x_2–Richtung genau in der Mitte der Kiste bei $x_2 = 2{,}5$ aufgehängt. Der äußere Lichtkegel, von dem aus noch Licht in die Kiste fallen kann, ist in nebenstehender Skizze durch die Strecke $\overline{LR}$ dargestellt. Der Punkt Q liegt auf der Vorderkante des Deckels. Licht kann ab dem Moment in die Kiste einfallen, ab dem der Punkt Q durch die Deckeldrehung sich rechts des Strahleneinfalls - gekennzeichnet durch $\overline{LR}$ - befindet. Die Grenze ist also dort, wo sich der Punkt Q auf der Geraden durch L und R befindet.



Klausuraufschrieb

a) *Abstand zwischen den Kanten AB und GH:*
$H(0|5|4)$

$$d = |\overrightarrow{AH}| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{41} = 6{,}4$$

Abstand zwischen den Kanten AB und GH beträgt $6{,}4\ LE$.
Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t:
$E(0|0|4)$

$$g_{EH}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$E_t \cap g_{EH}$
(1) $x_1 = 0$
(2) $x_2 = k$
(3) $x_3 = 4$
$t \cdot 0 - 4 = -4$
Die Ebenengleichung von E_t ist für alle g_{EH} erfüllt, die Gerade g_{EH} liegt in allen E_t.
E_t bei geschlossenem Deckel:
Bei geschlossenem Deckel ist $E_t \parallel x_1x_2$-Koordinatenebene im Abstand 4, somit
E_0: $x_3 = 4$
E_t bei um 90° geöffneten Deckel:
Bei um 90° geöffneten Deckel liegt dieser in der x_2x_3-Koordinatenebene. Diese hat die Gleichung H: $x_1 = 0$
Es existiert kein t, sodass $E_t = H$ ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

b) *Koordinaten von Punkt P:*

E_2: $2x_1 - x_3 = -4$

$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

g_{QP}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1{,}5 + 2k; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 4 - k$

$E_2 \cap g_{QP}$

$2 \cdot (1{,}5 + 2k) - 4 + k = -4$

$3 + 5k = 0 \implies k = -\frac{3}{5}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(0{,}3|0|4{,}6)$.

c) *Öffnungswinkel für E_2:*

$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_2} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_2}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \approx 63{,}4°$

Der Öffnungswinkel für E_2 beträgt $63{,}4°$.

E_t für Öffnungswinkel $\alpha = 60°$:

$\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad cos(60°) = 0{,}5$

$$0{,}5 = \frac{|\overrightarrow{n_t} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_t}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$0{,}5 \cdot \sqrt{t^2 + 1} = 1$

$\sqrt{t^2 + 1} = 2 \qquad | \qquad ^2$

$t^2 = 3 \implies t_1 = \sqrt{3}; \quad t_2 = -\sqrt{3}$

Wegen $t > 0$ ist $t = \sqrt{3}$ die einzigste Lösung.

Der Öffnungswinkel beträgt $60°$ *für Ebene* $E_{\sqrt{3}}$

Ermittlung von t für Öffnungswinkel $0° \leq \alpha < 90°$

$$cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \implies \quad t^2 + 1 = \frac{1}{cos^2(\alpha)}$$

Wegen $t \geq 0$ gilt: $t = \sqrt{\frac{1}{cos^2(\alpha)} - 1}; \; 0° \leq \alpha < 90°$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

d) *Maximaler Öffnungswinkel der Kiste:*

Koordinaten von $R(3|2{,}5|4)$

$g_{\overline{LR}}$: $\vec{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$

Koordinaten von $Q(3t|2{,}5|20-16t)$

Die Strecke $\overline{QS}$ entspricht der Breite der Kiste mit $3\,LE$.

Koordinaten von $S(0|2{,}5|4)$. Damit gilt:

$|\overrightarrow{QS}| = 3 = \sqrt{(0-3t)^2 + \left(4-(20-16t)\right)^2}$

$265t^2 - 512t + 247 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 0;\ t_2 \approx 0{,}93$

$t_1 = 0$ ist der Wert für Q in R (Deckel geschlossen), $t_2 \approx 0{,}93$ ist der Wert für Q auf $\overline{LR}$.

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} + 0{,}93 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}796 \\ 2{,}5 \\ 5{,}087 \end{pmatrix}$

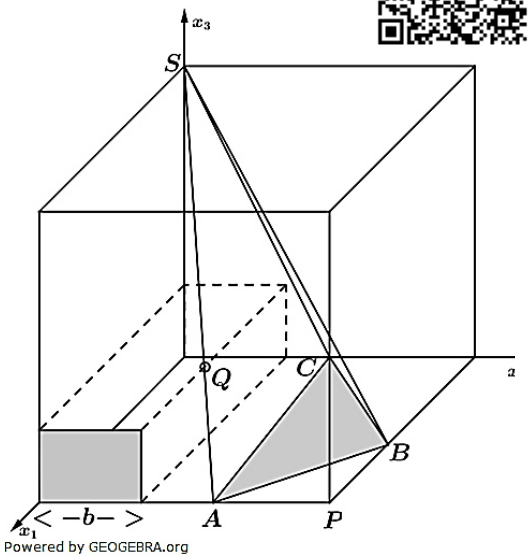
Hieraus ergibt sich die Strecke h (siehe Skizze) mit $h \approx 5{,}087 - 4 = 1{,}087$. Es gilt nun $sin(\alpha) = \frac{h}{3} \approx 0{,}362;\ \alpha \approx 21{,}24\,°$

Der maximale Öffnungswinkel beträgt ca. $21{,}24\,°$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0|0|0)$, $P(10|10|0)$ und $S(0|0|10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze).
Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A(10|6|0)$, $B(6|10|0)$ und $C(10|10|5)$.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: $E: 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$)

b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen?

c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist?

Aufgabe B2.1

Die Punkte $A(5|0|0)$, $B(5|3|0)$, $C(5|0|4)$, $F(0|0|0)$, $G(0|3|0)$ und $H(0|0|4)$ sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Fläche $BGHC$ liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1x_2-Ebene?
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG.
(Teilergebnis: E: $4x_2 + 3x_3 = 12$)

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius $0{,}5$ und Grundkreismittelpunkt $M[0|0{,}5|0{,}5)$, dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft.
Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?
Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt $M^*(0|r|r)$, dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren.
Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders.

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

In einem Viereck $ABCD$ gilt für die Diagonale AC: $\overrightarrow{AC} = 0{,}4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Zeichnen Sie ein solches Viereck $ABCD$.
In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonale geteilt?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bilden den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und daraus die Koordinatengleichung mit einer Punktprobe mit A.
Winkel zwischen E und x_1x_2–Koordinatenebene:
Den Winkel zwischen den Grundflächen von Pyramide und Würfel ermitteln wir über den Schnittwinkel der Normalenvektoren.
Höhe der Pyramide auf Diagonalen $\overrightarrow{PS}$:
Der Vektor $\overrightarrow{AS}$ muss ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene sein, dann liegt die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen des Würfels.

b) *Volumen der Pyramide:*
Das Pyramidenvolumen errechnet sich aus einem Sechstel des Betrages des Spatproduktes der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$. Der prozentuale Anteil ist der Quotient aus Pyramidenvolumen und Würfelvolumen.

c) *Volumen des Quaders für $b = 4$:*
Zu bestimmen ist die Höhe h des Quaders. Hierzu schneiden wir die Gerade durch die Punkte A und S mit einer zur x_1x_3–Koordinatenebene parallelen Ebene im Abstand $x_2 = b$. Die x_3–Koordinate des Schnittpunktes entspricht dann der Höhe h des Quaders.
Volumen des Quaders für b variabel:
Für die variable Breite b des Quaders ermitteln wir die x_3–Koordinate des Schnittpunktes wie vor in Abhängigkeit von b. Das damit ermittelte Volumen des Quaders ist dann eine Funktion von b mit einem Maximum, welches per GTR bestimmt wird.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = d$

$E\colon\ 5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 0 = d \implies d = 80$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$ **q.e.d.**

Winkel zwischen E und x_1x_2–Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{1}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) = 60{,}5\,°$$

Der Winkel zwischen E und der x_1x_2–Koordinatenebene beträgt $60{,}5\,°$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Höhe der Pyramide auf Diagonalen $\overrightarrow{PS}$

$k \cdot \overrightarrow{n_E} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{PS}$

$k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ ist kein Vielfaches des Normalenvektors von E, also liegt die Höhe der Pyramie nicht auf der Diagonalen $\overline{PS}$ des Würfels.

b) *Volumen der Pyramide:*

$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}\right|$

$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-200 - 120 - 160| = \frac{1}{6} \cdot 480 = 80$

$V_{Würfel} = 1000$

$\frac{V_{Pyr}}{V_{Würfelv}} = \frac{80}{1000} = 0{,}08 = 8\,\%$

Das Pyramidenvolumen beträgt $8\,\%$ des Würfelvolumens.

c) *Volumen des Quaders für $b = 4$:*

$V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$ mit $a = 10$, $b = 4$ und $c = x_{3_Q}$.

Berechnung der Koordinaten von Q:

Q ist der Schnittpunkt der Geraden durch A und S mit der zur x_1x_3–Koordinatenebene parallelen Ebene im Abstand $b = 4$.

g_{AS}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

E_H: $x_2 = 4$

$g_{AS} \cap E_H$

$x_{2_g} = 6 + 3r$

$6 + 3r = 4 \Longrightarrow r = -\frac{2}{3}$

$x_{3_g} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-5) = \frac{10}{3}$

$V_{Qu} = 10 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3} = \frac{400}{3}$

Das Volumen des Quaders beträgt $133{,}3\,VE$.

Volumen des Quaders für b variabel

E_H: $x_2 = b$

$g_{AS} \cap E_H$

$x_{2_g} = 6 + 3r$

$6 + 3r = b \Longrightarrow r = \frac{b-6}{3}$

$x_{3_g} = \left(\frac{b-6}{3}\right) \cdot (-5) = 10 - \frac{5}{3}b$

$V_{Qu}(b) = 10 \cdot b \cdot \left(10 - \frac{5}{3}b\right) = -\frac{50}{3}b^2 + 100b$

$V_{Qu}(b)_{max} \stackrel{GTR}{=} 150$ für $b \stackrel{GTR}{=} 3$

Das Volumen des Quaders für ein variables b ist $0 < V_{Qu} \leq 150$ für $0 < b < 6$.

Das maximale Volumen beträgt $150\,VE$ für $b = 3$.

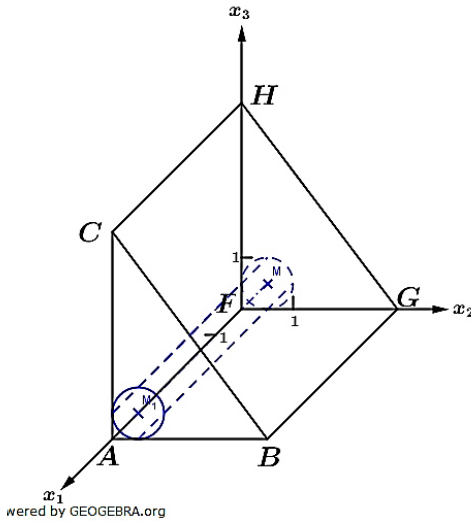
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Prisma in Koordinatensystem:*
Siehe Grafik.
Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche $BGHC$ liegt:
Von der Ebene sind die beiden Spurpunkte G und H bekannt. Die Ebene verläuft parallel zur x_1–Achse. Wir stellen die Achsenabschnittsform der Ebene und daraus die Koordinatengleichung auf.
Winkel zwischen E_{BGHC} und x_1x_2–Ebene:
Den Winkel ermitteln wir über den Schnittwinkel der Normalenvektoren.
Abstand Punkt A von der Geraden CG:
Berechnung über die Abstandsformel Punkt/Gerade.



b) *Abstand $M(0|0{,}5|0{,}5)$ von den Seitenflächen:*
Wir bilden den Abstand Punkt/Ebene über die HNF.
Gleicher Abstand $M^*(0|r|r)$ von den Seitenflächen:
Den Mittelpunkt M^* errechnen wir ebenfalls über den Abstand Punkt/Ebene (HNF), wobei die drei Abstände gleich groß sein müssen.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche $BGHC$ liegt:*
Spurpunkte der Ebene E_{BGHC} sind $G(0|3|0)$ und $H(0|0|4)$.

E_{BGHC}: $\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{4}=1$

E_{BGHC}: $4x_2+3x_3=12 \implies \overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$

Winkel zwischen E_{BGHC} und x_1x_2–Ebene:

$\overrightarrow{n_{x_1x_2}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{3}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{1}}=\frac{3}{5}$$

$\alpha=cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=53{,}13\ °$

Der Winkel zwischen E und der x_1x_2–Koordinatenebene beträgt $53{,}1\ °$.
Abstand Punkt A zur Geraden CG:

g_{CG}: $\vec{x}=\overrightarrow{OC}+r\cdot\overrightarrow{CG}$

$$d=\frac{|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{CG}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\3\\-4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-5\\3\\-4\end{pmatrix}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-12\\-20\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{544}}{\sqrt{50}}\approx 3{,}298$$

Der Abstand von Punkt A zur Geraden CG beträgt etwa $3{,}3\ LE$.

b) *Abstand $M(0|0{,}5|0{,}5)$ von den Seitenflächen:*

Abstand M von E_{BGHC} über die HNF:

$d_{E_{BGHC}} = \frac{|4\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-8{,}5|}{5} = 1{,}7$

Abstand M von E_{ABGF} (=x_1x_2-Koordinatenebene) über die HNF:

$d_{E_{ABGF}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1}} = 0{,}5$

Abstand M von E_{ACHF} (=x_1x_3-Koordinatenebene) wie $d_{E_{ABGF}} = 0{,}5$

Der Zylinder berührt nur zwei Seitenflächen, er berührt nicht die Seitenfläche $BGHC$.

Gleicher Abstand $M^*(0|r|r)$ von den Seitenflächen:

Abstand M^* von E_{BGHC} über die HNF: $d_{E_{BGHC}} = \frac{|4\cdot r+3\cdot r-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|7r-12|}{5}$

Abstand M^* von E_{ABGF} (=x_1x_2-Koordinatenebene) über die HNF:

$d_{E_{ABGF}} = \frac{|r|}{\sqrt{1}} = |r|$ $\qquad$ $d_{E_{BGHC}} = d_{E_{ABGF}}$

$\frac{|7r-12|}{5} = r \implies |7r-12| = 5r$

$7r_1 - 12 = 5r_1 \implies r_1 = 6$ $\qquad$ $7r_2 - 12 = -5r_2 \implies r_2 = 1$

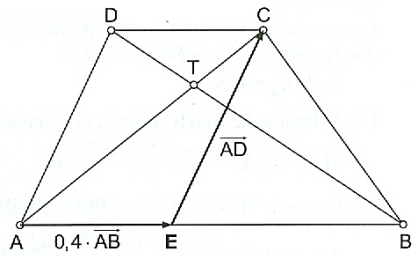
Die Lösung $r_1 = 6$ entfällt, da dann der Mittelpunkt M^* außerhalb des Prismas liegen würde.

Der Radius des Zylinders, der alle drei Seitenflächen berührt beträgt $1\,LE$.

Lösung B2. 2

Klausuraufschrieb

Nachdem wir das Viereck $ABCD$ gezeichnet haben, ziehen wir eine Parallele zu $\overline{AD}$ durch C und erhalten dadurch das Parallelogramm $AECD$ (siehe nebenstehende Abbildung).



Einfachste Lösung:

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

$\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{AB}}{0{,}4\cdot\overline{AB}} = \frac{1}{0{,}4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Die Diagonale $\overline{AC}$ wird von der anderen Diagonalen im Verhältnis $5:2$ geteilt.

Die (umständlichere) vektorielle Lösung:

$\overrightarrow{AC} = 0{,}4\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Wir betrachten nun den geschlossenen Vektorzug $ATBA$.

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} = \vec{o}$

Mit den beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ergibt sich:

$\overrightarrow{AT} = r\cdot(0{,}4\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{TB} = s\cdot\overrightarrow{DB} = s\cdot(-\vec{b} + \vec{a})$; $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$

Einsetzen in die obige Gleichung:

$r\cdot(0{,}4\vec{a} + \vec{b}) + s\cdot(-\vec{b} + \vec{a}) - \vec{a} = \vec{o}$

$\vec{a}\cdot(0{,}4r + s - 1) + \vec{b}\cdot(r - s) = \vec{o}$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, muss gelten:

(1) $0{,}4r + s - 1 = 0$

(2) $r - s = 0 \implies r = s \longrightarrow$ (1)

(1) $0{,}4s + s - 1 = 0 \implies s = \frac{1}{1{,}4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$; $r = \frac{5}{7}$

Die Strecke $\overline{AC} = \frac{7}{7}$ ist also in $\overline{AT} = \frac{5}{7}$ und $\overline{TC} = \frac{2}{7}$ Teile unterteilt. Das Verhältnis $\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}}$ beträgt $5:2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

Die x_1x_2-Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt. Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1(6|3|0)$.
Das Radar erfasst ein Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P(7|29|7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).

a) In welchem Punkt befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr?
Woran erkennen Sie, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet?
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.
Unter welchem Winkel fliegt das Flugzeug auf den Boden zu?
Zu welcher Uhrzeit und in welchem Punkt würde es bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen?

b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2(17|9|0)$.
Der Anflug des Testflugzeugs F_1 auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f_1 und die beiden Radarstationen in einer Ebene liegen.
Prüfen Sie, ob das zutrifft.
Die Radarstation R_2 übernimmt die Flugüberwachung zu dem Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von R_1 entfernt.
Um wie viel Uhr ist dies der Fall?

c) Die Flugbahn eines zweiten Testflugzeugs F_2 wird beschrieben durch

$$f_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).
Wie weit sind die Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr voneinander entfernt?
Berechnen Sie, wie nahe sich die beiden Flugzeuge kommen.

Aufgabe B2.1

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte $P(0|-6|0)$, $Q(12|0|0)$ und $R(0|6|0)$. Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfs hat die Eckpunkte $P^*(0|-2|2)$, $Q^*(2|0|2{,}5)$ und $R^*(0|1|2{,}5)$.

a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem Koordinatensystem dar.
Begründen Sie, dass die Deck- und die Grundfläche des Pyramidenstumpfes nicht parallel sind.
Bestimmen Sie den Winkel, den die Kante QQ^* mit der x_1-Achse bildet.
Zeigen Sie, dass $S(0|0|3)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

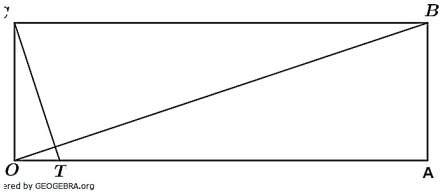
b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R.
Zeigen Sie, dass die Seitenfläche QRR^*Q^* des Pyramidenstumpfs ein Trapez ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit. Für den Punkt T gilt $\overline{OT} = \frac{1}{9}\overline{OA}$.

Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{OB}$ und $\overline{TC}$ orthogonal sind.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Position um 7.01 Uhr:*
Der Punkt um 7.01 Uhr entspricht $t = 1$ der Fluggeraden.
Begründung Sinkflug:
Sinkflug, wegen negativem Wert der x_3–Koordinate des Richtungsvektors.
Geschwindigkeit in km/h:
Die Geschwindigkeit in km/h ist 60-mal der Betrag des Richtungsvektors von f_1.
Winkel von F_1 zur Landebahn:
Wir berechnen den Schnittwinkel, den der Richtungsvektor von f_1 mit dem Normalenvektor der x_1x_2–Ebene einschließt.
Zeitpunkt der Landung:
Wir berechnen t der Fluggeraden für die x_3–Koordinate gleich 0 ist.

b) *Ebene, in der die Radarstation R_1 und R_2 liegen und zusätzlich der Aufpunkt $A(7|29|7)$ des Flugzeuges:*
Wir bilden die Ebenengleichung E mit dem Aufpunkt R_1, dem ersten Richtungsvektor $\overrightarrow{R_1R_2}$ und dem Richtungsvektor der Fluggeraden als zweiten Richtungsvektor der Ebene. Danach prüfen wir, ob der Aufpunkt $A \in E$ ist.
Zeitpunkt der Überwachung durch Radarstation R_2:
Wir bilden die Abstandsfunktion des Flugzeuges von der Radarstation R_1 und bestimmen mit dem GTR das Minimum. Dies ist der Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von der Radarstation R_1 wieder entfernt.

c) *Entfernung der beiden Flugzeuge um 7.04:*
Wir berechnen den Abstand zwischen den beiden Flugkoordinaten zum Zeitpunkt $t = 4$.
Kleinster Abstand der beiden Flugzeuge:
Wir bilden die Abstandsfunktion der beiden Flugzeuge voneinander und bestimmen mit dem GTR das Minimum.

Klausuraufschrieb

a) *Position um 7.01 Uhr:*

$$\overrightarrow{OP_{t=1}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$

F_1 befindet sich um 7.01 Uhr in Position $P(10|27|6)$.
Begründung Sinkflug:
F_1 befindet sich im Sinkflug, weil die x_3–Koordinate des Richtungsvektors von f_1 negativ ist.
Geschwindigkeit in km/h:

$$v_{F_1} = 60 \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 60 \cdot \sqrt{14} \approx 224{,}5$$

F_1 fliegt mit $224{,}5\ km/h$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Winkel von F_1 zur Landebahn:

Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{rv_{F_1}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{F_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{14} \cdot \sqrt{14}\right) = 15{,}5\,°$$

Das Flugzeug fliegt unter einem Winkel von $15{,}5\,°$ dem Boden zu.

Zeitpunkt der Landung:

$x_3 = 0 = 7 - t \;\Rightarrow\; t = 7$

$$\overrightarrow{OP_{Landung}} = \begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28\\15\\0\end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet um 7.07 Uhr im Punkt $P_{Landung}(28|15|0)$.

b) *Ebene, in der die Radarstation R_1 und R_2 liegen und zusätzlich der Aufpunkt $A(7|29|7)$ des Flugzeuges:*

$E\colon\; \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AR_1} + t \cdot \overrightarrow{R_1R_2}$

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AR_1} \times \overrightarrow{R_1R_2} = \begin{pmatrix}1\\26\\7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}11\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-42\\77\\-280\end{pmatrix} = (-7) \cdot \begin{pmatrix}6\\-11\\40\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}6\\-11\\40\end{pmatrix}$$

$E\colon\; 6x_1 - 11x_2 + 40x_3 = d$

$E\colon\; 6 \cdot 6 - 11 \cdot 3 + 40 \cdot 0 = d \;\Rightarrow\; d = 3$ | Punktprobe mit R_1

$E\colon\; 6x_1 - 11x_2 + 40x_3 = 3$

$E\colon\; 6 \cdot 7 - 11 \cdot 29 + 40 \cdot 7 \stackrel{?}{=} 3$ | Punktprobe mit A

$3 = 3$

Ja, die Flugbahn f_1 und die Radarstationen R_1 und R_2 liegen in einer Ebene.

Zeitpunkt der Überwachung durch Radarstation R_2:

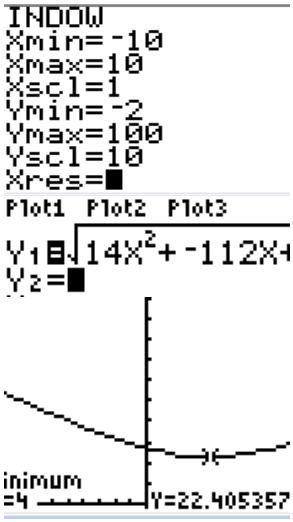
$$d_{F_1R_1} = \sqrt{\left(\overrightarrow{x_{F_1}} - \overrightarrow{OR_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}\right)^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}1\\26\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)^2}$$

$d(t) = \sqrt{1 + 6t + 9t^2 + 676 - 104t + 4t^2 + 49 - 14t + t^2}$

$d(t) = \sqrt{14t^2 - 112t + 726}$

$d(t)_{min} \overset{GTR}{\approx} 22{,}4$ für $t \overset{GTR}{=} 4$

Radarstation R_2 übernimmt um 7.04 Uhr die Flugüberwachung von F_1, welches zu diesem Zeitpunkt $22{,}4\,km$ von R_1 entfernt ist.



c) *Abstand F_1 von F_2 um $7{:}04$:*

Position F_1 um $7{:}04$:

$$\overrightarrow{OF_{1(4)}} = \begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\21\\3\end{pmatrix}$$

Position F_2 um $7{:}04$:

$$\overrightarrow{OF_{2(4)}} = \begin{pmatrix}18\\11\\7\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26\\19\\7\end{pmatrix}$$

$d = |\overrightarrow{F_{1(4)}F_{2(4)}}| = \sqrt{(26-19)^2 + (19-21)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{49 + 4 + 16}$

$d = \sqrt{69} \approx 8{,}31$

F_1 und F_2 sind um $7{:}04$ ca. $8{,}3\,km$ voneinander entfernt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Kleinester Abstand der beiden Flugzeuge:

$$d = \sqrt{(\overrightarrow{x_{F1}} - \overrightarrow{x_{F2}})^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}18\\11\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\begin{pmatrix}-11\\18\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{121 - 22t + t^2 + 324 - 144t + 16t^2 + t^2}$$
$$= \sqrt{18t^2 - 166t + 445}$$

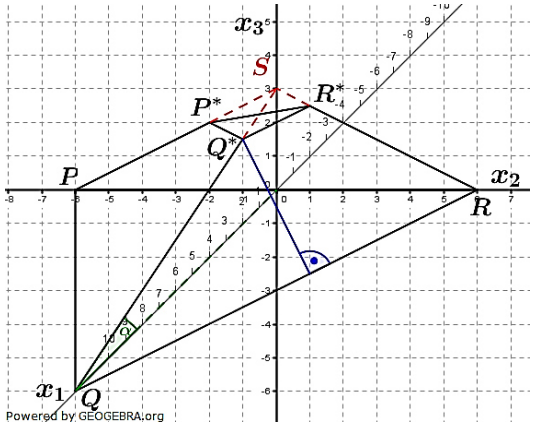
$d(t)_{min} \overset{GTR}{\approx} 7{,}89$ für $t \overset{GTR}{=} 4{,}6$

Die beiden Flugzeuge nähern sich $4{,}6\ min$ nach Beobachtungsbeginn auf ca. $7{,}9\ km$.

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Nachweis Nichtparallelität zwischen E_{PQR} und $E_{P^*Q^*R^*}$:*
Wir bilden die Normalenvektoren der Ebenen durch P, Q und R bzw. P^*, Q^* und R^*. Sind die beiden Normalenvektoren kein Vielfaches voneinander, so sind die Ebenen nicht parallel.



Winkel $\overline{QQ^*}$ mit der x_1–Achse:
Berechnung über die jeweiligen Richtungsvektoren der zugehörigen Geraden.

Ursprüngliche Spitze S der Pyramide:
Punktbestimmung der Spitze S über die Schnittpunktbestimmung der Geraden durch QQ^* und RR^* (wahlweise PP^*).

b) *Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R:*
Berechnung über die Punkt-Abstandsformel Punkt/Gerade.

Nachweis des Trapezes der Seitenfläche:
Nachweis der lineare Abhängigkeit von $\overrightarrow{QR}$ und $\overrightarrow{Q^*R^*}$ und $\left|\overrightarrow{QR}\right| \neq \left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right|$.

Flächeninhalt des Trapezes:
Nachweis über die Flächenformel eines Trapezes. Die Höhe des Trapezes wurde bereits durch den Abstand von Q^* von der Geraden durch Q und R bestimmt.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Klausuraufschrieb

a) *Nachweis Nichtparallelität zwischen E_{PQR} und $E_{P^*Q^*R^*}$:*

$\overrightarrow{n_{E_{PQR}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ da die Punkte P, Q und R alle in der x_1x_2–Ebene liegen.

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{P^*Q^*R^*}}} = \overrightarrow{P^*Q^*} \times \overrightarrow{P^*R^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = (-0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{n_{E_{PQR}}} \neq \overrightarrow{n_{E_{P^*Q^*R^*}}}$ sind die beiden Ebenen nicht parallel.

Winkel $\overline{QQ^*}$ mit der x_1–Achse:

Der Richtungsvektor der x_1–Achse lautet $\overrightarrow{rv_{x_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{QQ^*} \circ \overrightarrow{rv_{x_1}}|}{|\overrightarrow{QQ^*}| \cdot |\overrightarrow{rv_{x_1}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-10|}{\sqrt{106{,}25}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{106{,}25}}\right) = 14{,}03\,°$$

Der Winkel zwischen $\overline{QQ^*}$ und der x_1–Achse beträgt etwa $14\,°$.

Ursprüngliche Spitze S der Pyramide:

Gerade durch $\overline{QQ^*}$: $\quad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade durch $\overline{RR^*}$: $\quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g \cap h$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4r = -12 \Longrightarrow \; r = -3$

$-2s = 6 \Longrightarrow \; s = -3$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die ursprüngliche Spitze hat die Koordinaten $S(0|0|3)$. **q.e.d.**

b) *Abstand Q^* von der Geraden durch Q und R:*

$$d = \frac{|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QQ^*}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{180}} = \frac{15 \cdot \sqrt{21}}{6 \cdot \sqrt{5}} \approx 5{,}12$$

Der Abstand Q^* von der Geraden durch Q und R beträgt $5{,}1\ LE$.

Nachweis Trapez QRR^*Q^*:

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{Q^*R^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{QR} = 6 \cdot \overrightarrow{Q^*R^*} \Longrightarrow \overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{Q^*R^*}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{180}; \quad |\overrightarrow{Q^*R^*}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$$

Wegen $\overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{Q^*R^*} \wedge |\overrightarrow{QR}| \neq |\overrightarrow{Q^*R^*}|$ ist das Viereck QRR^*Q^* ein Trapez.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Fläche des Trapezes:

$A_{Trapez} = \frac{d}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{QR}\right| + \left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right|\right) = \frac{5{,}1}{2} \cdot \left(\sqrt{180} + \sqrt{5}\right) \approx 39{,}9$

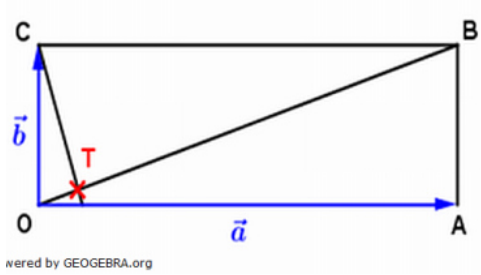
Die Fläche des Trapezes QRR^*Q^* *beträgt ca.* $39{,}9\ FE$

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Einfachste Lösungsmöglichkeit

Betrachtung der Situation in einem kartesischen Koordinatensystem. Wir vergeben den Punkten O, A, B, C und T Koordinaten.



$O(0|0);\ A(n|0);\ B\left(n\middle|\frac{1}{3}n\right);\ C\left(0\middle|\frac{1}{3}n\right);\ T(\frac{1}{9}n|0)$

Die Funktionsgleichung der Geraden durch O und B lautet dann:

$$y = \frac{1}{3}x$$

$\overline{CT}$ soll senkrecht $\overline{OB}$ stehen, dann muss die Steigung der Geraden durch die Punkte C und T $m = -3$ sein. Mit der Punkt-Steigungsformel bezüglich Punkt T erhalten wir dann

$$y = -3(x - \frac{1}{9}n)$$

Der Schnittpunkt mit der y–Achse errechnet sich jetzt aus

$$y = -3 \cdot \left(0 - \frac{1}{9}n\right) = \frac{1}{3} \cdot n,$$

was den Koordinaten von Punkt C entspricht.

Die Strecken $\overline{OB}$ *und* $\overline{CT}$ *stehen senkrecht aufeinander.*

Komplexere Betrachtungsweise über die Vektorzüge $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{CT}$.

$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b};\ \overrightarrow{CT} = -\vec{b} + \frac{1}{9} \cdot \vec{a}$

Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin:

$$|\vec{a}| = 3 \cdot |\vec{b}| \implies \vec{a}^2 = 9\vec{b}^2 \qquad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

$\overrightarrow{CT}$ soll senkrecht $\overrightarrow{OB}$ stehen, dann muss gelten:

$$\overrightarrow{CT} \circ \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \left(-\vec{b} + \frac{1}{9} \cdot \vec{a}\right) = 0$$

$$-\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b}^2 + \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{1}{9} \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \qquad -\vec{b}^2 + \frac{1}{9}\vec{a}^2 = 0.$$

Mit $\vec{a}^2 = 9\vec{b}^2$:

$$-\vec{b}^2 + \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \vec{b}^2 = 0 \implies 0 = 0$$

Die Strecken $\overline{OB}$ *und* $\overline{CT}$ *stehen senkrecht aufeinander.*

Aufgabe B1

Gegeben sind die Punkte $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute.
Zeigen Sie, dass die Raute in der Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.
(Teilergebnis: $D(4|4|-2)$).

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ der Punkt $S_t(-3+3t|-3+3t|5+t)$. Die Pyramide P_t hat die Grundfläche $ABCD$ und die Spitze S_t.

b) Zeichnen Sie die Pyramide P_3 in ein Koordinatensystem.
Die Punkte B, D und S_3 legen eine Ebene F fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.
Zeigen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist.

c) Für welchen Wert von t geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche?
Das gleichschenklige Dreieck ACS_3 wird um die Achse AC gedreht. In welchen Punkten durchstößt dabei seine Spitze die x_1x_2-Ebene?

Aufgabe B2.1

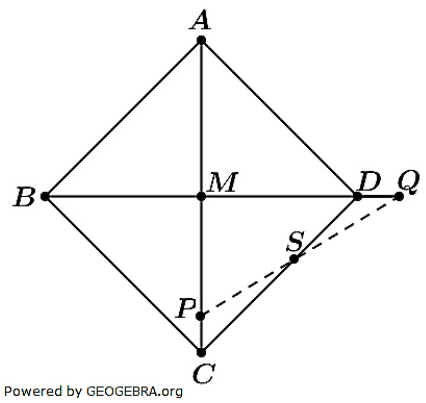
Gegeben sind der Punkt $A(4{,}5|6|3{,}5)$ sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_2 –Ebene.
Zeichnen Sie die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Unter welchem Winkel schneidet g die x_1x_2 –Ebene?
Welcher Punkt F auf der Geraden g hat vom Punkt A den kleinsten Abstand?
Die Gerade h entsteht durch Spiegelung von g an A.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.
(Teilergebnis: $F(3|4|1)$)

b) Begründen Sie, dass bei Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F eine Ebene entsteht.
Zeigen Sie, dass $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung dieser Ebene ist.
Untersuchen Sie, ob die Punkte $P(18|-9|1)$ und $Q(-2|1|-9)$ auf verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen.

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Das Quadrat $ABCD$ hat den Mittelpunkt M. Die Punkte P und Q werden so gewählt, dass $\overline{MP} = \frac{3}{4}\overline{MC}$ und $\overline{MQ} = \frac{5}{4}\overline{MD}$ gilt.
Die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{PQ}$ schneiden sich im Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke $\overline{CD}$?

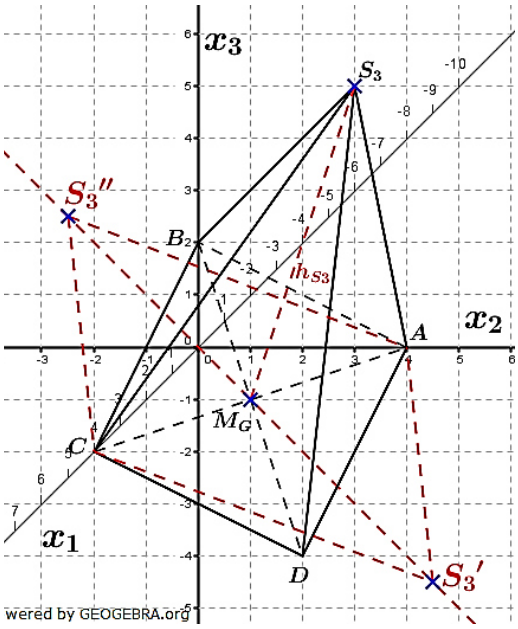


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Gleichschenkliges Dreieck ABC:*
Zwei Dreiecksseiten müssen gleich lang sein.
Koordinaten des Punktes D:
Berechnung der Koordinaten von D über Vektoraddition.
Innenwinkel der Raute:
Innenwinkel der Raute über Schnittwinkelbestimmung zweier Vektoren. Eine Raute hat zwei gegenüberliegende gleich große Winkel. Ist z. Bsp. der Winkel α ermittelt, errechnet sich der zweite Winkel über $\beta = 180° - \alpha$
Koordinatengleichung der Ebene, in der die Raute liegt.
Wir bilden das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ und machen eine Punktprobe mit A.



b) *Zeichnung von P_3 in Koordinatensystem:*
Siehe Grafik rechts.
Koordinatengleichung von F:
Wir bilden das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BS_3}$ und machen eine Punktprobe mit B.
Symmetrieebene F:
Ebene F ist dann Symmetrieebene, wenn ihr Normalenvektor und der Normalenvektor von E aufeinander senkrecht stehen.

c) *t für Höhe der Pyramide P_t durch Mittelpunkt der Grundfläche:*
Der Vektor $\overrightarrow{M_G S_t}$ muss ein Vielfaches des Normalenvektors von E sein.
Punkte der x_1x_2–Ebene bei Drehung von ACS_3 um die Achse AC:
Für S_3' bzw. S_3'' gilt $|\overrightarrow{M_G S_3}| = |\overrightarrow{M_G S_3'}| = |\overrightarrow{M_G S_3''}|$. Da F Symmetrieebene ist, ist auch die Ebene durch A, C und S_3 Symmetrieebene. Der Mittelpunkt M_G liegt in der x_1x_2-Ebene auf einer Geraden durch den Ursprung und M_G.

Klausuraufschrieb

a) *Gleichschenkliges Dreieck ABC:*

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{20}; \quad |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{20}$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
Koordinaten des Punktes D:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Der Punkt $D(4|4|-2)$ bildet mit A, B und C zusammen eine Raute.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2010 BW

Innenwinkel der Raute:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{5}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 70{,}46°$

$\beta = 180° - \alpha = 109{,}54°$

Die Schnittwinkel der Raute sind $\alpha = 70{,}5°$ und $\beta = 109{,}5°$.

Koordinatengleichung der Ebene, in der die Raute liegt.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\16\end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_1 + x_2 + 2x_3 = d$

$E\colon\ 0 + 4 + 2 \cdot 0 = d \ \Rightarrow\ d = 4$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

b) *Koordinatengleichung von F:*

$S_3(6|6|8)$

$$k \cdot \overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BS_3} = \begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}48\\-48\\0\end{pmatrix} = 48 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$F\colon\ x_1 - x_2 = d$

$F\colon\ 0 - 0 = d \ \Rightarrow\ d = 0$ | Punktprobe mit B

$F\colon\ x_1 - x_2 = 0$

Symmetrieebene F:

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} \stackrel{?}{=} 0$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = 0$ ist F die Symmetrieebene der Pyramide P_3.

c) *t für Höhe der Pyramide P_t durch Mittelpunkt der Grundfläche:*

Mittelpunkt M_G:

$$\overrightarrow{OM_G} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \qquad M_G(2|2|0)$$

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{M_G S_t}$

$$k \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5+3t\\-5+3t\\5+t\end{pmatrix}$$

(1) $k = -5 + 3t$

(2) $2k = 5 + t$

(1)->(2)

(2) $2(-5 + 3t) = 5 + t$

$5t = 15 \ \Rightarrow\ t = 3$

Für $t = 3$ verläuft die Pyramidenhöhe durch den Schnittpunkt M_G der Diagonalen der Raute $ABCD$.

Punkte der x_1x_2–Ebene bei Drehung von ACS_3 um die Achse AC:

Es gilt: $|\overrightarrow{M_G S_3}| = |\overrightarrow{M_G S_3'}| = |\overrightarrow{M_G S_3''}|$

$$|\overrightarrow{M_G S_3}| = \left|\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{96}$$

$S_3'(u|u|0)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\left|\overrightarrow{M_G S_3}'\right| = \left|\begin{pmatrix} u-2 \\ u-2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\cdot(u-2)^2} = \sqrt{96} \quad | \qquad {}^2;\ :2$

$(u-2)^2 = 48$

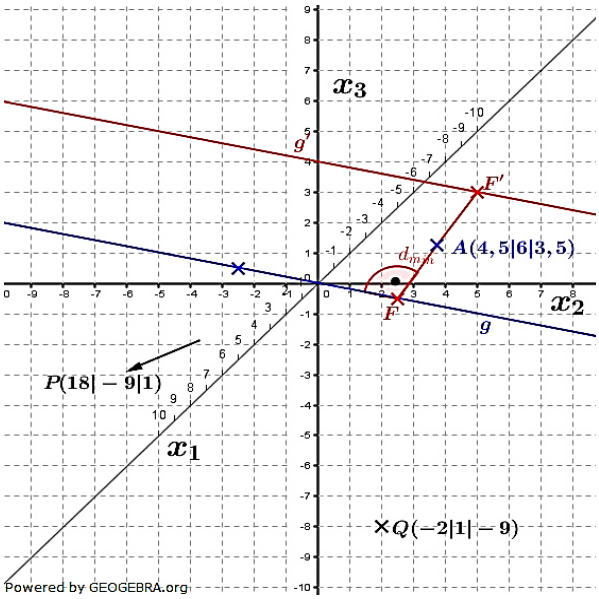
$|u-2| = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \implies u_1 = 8{,}93;\ u_2 = -4{,}93$

Die Spitze des um die Achse AC gedrehten Dreiecks ACS_3 durchstößt die x_1x_2–Ebene in den Punkten $S_3'(8{,}93|8{,}93|0)$ und $S_3''(-4{,}93|-4{,}93|0)$.

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Schnittpunkt von g mit der x_1x_2-Ebene:*
Schnittpunkt ist der Spurpunkt der Geraden g mit der x_1x_2-Ebene.
Schnittwinkel von g mit der x_1x_2-Ebene:
Schnittwinkelberechnung mit dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.
Kleinster Abstand von g zu Punkt A:
Der Vektor $\overrightarrow{FA}$ und der Richtungsvektor der Geraden müssen senkrecht stehen.



Spiegelgerade h:
Der Spiegelpunkt F' wird zum Aufpunkt von h, der Richtungsvektor wird beibehalten.

b) *Begründung:*
Die Gerade durch A und F steht senkrecht auf g. Somit ist der Richtungsvektor $\overrightarrow{AF}$ der Normalenvektor der Rotationsebene mit deren Aufpunkt F.
Nachweis der Koordinatengleichung der Rotationsebene:
Mit dem zuvor ermittelten Normalenvektor ergibt sich auch die Koordinatengleichung der Ebene.
Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene:
Betragslose Abstandsbestimmung von P und Q zu E über die HNF.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2010 BW

Klausuraufschrieb

a) *Schnittpunkt von g mit der x_1x_2-Ebene:*

Der Spurpunkt von g mit der x_1x_2–Ebene hat die x_3–Koordinate 0.

$x_3 = 0 = 3 + t \implies t = -3$

$$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$$

$S_{x_1x_2}(2|6|0)$

Schnittwinkel von g mit der x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{n_{E_{x_1x_2}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_{x_1x_2}}}\circ\overrightarrow{rv_g}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_{x_1x_2}}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{rv_g}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{6}}$$

$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 24{,}1\,°$

Die Gerade g schneidet die x_1x_2-Ebene unter etwa $24{,}1\,°$.

Kleinster Abstand A von g:

$\overrightarrow{rv_g}\circ\overrightarrow{AF} = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5+t-4{,}5\\-2t-6\\3+t-3{,}5\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0{,}5+t\\-6-2t\\-0{,}5+t\end{pmatrix} = 0$$

$0{,}5 + t + 12 + 4t - 0{,}5 + t = 0 \implies t = -2$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$$

Der Punkt $F(3|4|1)$ auf g hat von A den kleinsten Abstand.

Spiegelgerade h:

Spiegelpunkt F':

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + 2\cdot\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1{,}5\\2\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\6\end{pmatrix} \implies F'(6|8|6)$$

$$h:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OF'} + r\cdot\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}6\\8\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$$

b) *Begründung:*

$\overrightarrow{FA}\perp\overrightarrow{rv_g}$, somit steht die Drehachse senkrecht auf dem Rotationsgebilde. Dadurch entsteht eine Ebene E_G.

Wegen $\overrightarrow{FA}\perp\overrightarrow{rv_g}$ ist $\overrightarrow{n_{E_G}} = k\cdot\overrightarrow{FA} \implies \overrightarrow{n_{E_G}} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

Nachweis der Koordinatengleichung:

$$\overrightarrow{n_{E_G}} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$E:\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$

$E:\ 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 = d \implies d = 30$ | Punktprobe mit F

$E:\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene:

Für P:

$d_P = \frac{3\cdot 18-4\cdot 9+5\cdot 1-30}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{-7}{\sqrt{50}}$

Für Q:

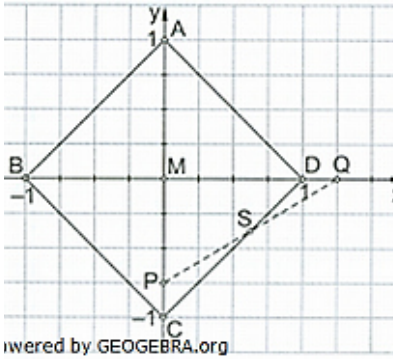
$d_Q = \frac{3\cdot(-2)+4\cdot 1+5\cdot(-9)-30}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{-77}{\sqrt{50}}$

Da beide Abstände das gleiche Vorzeichen haben, liegen P und Q auf derselben Seite der Ebene E.

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Einfachste Lösung:



Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Punkt M im Ursprung. Die Gerade durch C und D hat die Gleichung $g(x) = x - 1$. Die Gerade durch P und Q hat die Gleichung $h(x) = \frac{3}{5}x - \frac{3}{4}$.

Punkt S über $g(x) \cap h(x)$:

$x - \frac{3}{5}x - 1 + \frac{3}{4} = 0$

$\frac{2}{5}x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{8}$

$g\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{3}{8}$

Koordinaten von S sind $S(\frac{5}{8} | -\frac{3}{8})$

Berechnung der Strecke $\overline{SD}$:

$\overline{SD} = \sqrt{\left(1-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{3}{8}\cdot\sqrt{2}$

Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

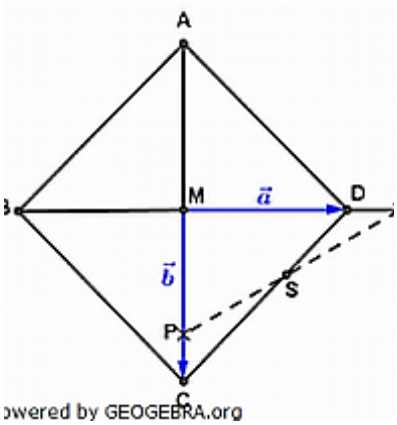
$\overline{CD} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Damit ist die Strecke $\overline{CS} = \frac{5}{8}\cdot\sqrt{2}$

$\frac{\overline{CS}}{\overline{SD}} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\sqrt{2}}{\frac{3}{8}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$

Der Punkt S teilt die Strecke $\overline{CD}$ im Verhältnis $5:3$.

Vektorielle Lösung:



$ABCD$ ist ein Quadrat mit Mittelpunkt in M. Die beiden Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{MC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MD}$ sind linear unabhängig. Für die Punkte P und Q gilt nach Vorgabe:

$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{3}{4}\cdot\vec{a}$

$\overrightarrow{MQ} = \frac{5}{4}\cdot\overrightarrow{MD} = \frac{5}{4}\cdot\vec{b}$

Wir betrachten den geschlossenen Vektorzug, der über den Schnittpunkt S der Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{PQ}$ führt, z. B. $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \vec{o}$.

Dabei gilt:

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP} = \vec{a} - \frac{3}{4} \cdot \vec{a} = \frac{1}{4} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{CS} = r \cdot \overrightarrow{CD} = r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{SP} = s \cdot \overrightarrow{QP} = s \cdot \left(-\frac{5}{4} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}\right)$$

Eingesetzt in die obige Gleichung liefert:

$$\frac{1}{4} \cdot \vec{a} + r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) + s \cdot \left(-\frac{5}{4} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}\right) = \vec{o}$$

$$\left(\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4} \cdot s\right) \cdot \vec{a} + \left(r - \frac{5}{4} \cdot s\right) \cdot \vec{b} = \vec{o}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ muss gelten:

I) $\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4} \cdot s = 0$

II) $r - \frac{5}{4} \cdot s = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{4}{5} \cdot r$ eingesetzt in I)

$$\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot r = 0$$

$$\frac{8}{20} \cdot r = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{5}{8}$$

Dem Ergebnis entnimmt man:

Die Strecke $\overline{CD} = \frac{8}{8}$ ist also in $\overline{CS} = \frac{5}{8}$ und $\overline{SD} = \frac{3}{8}$ Teile unterteilt.

Das Verhältnis $\frac{\overline{CS}}{\overline{SD}}$ *beträgt* $5:3$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte $A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$, $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|4)$ gegeben.
Das Viereck $PQRS$ beschreibt den Deckel der Truhe.

a) Stellen Sie die Truhe in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie das Volumen der Truhe.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.
(Teilergebnis: E_{Deckel}: $x_2 - 2x_3 = -4$)

Gegeben ist eine Ebenenschar durch E_a: $x_2 - ax_3 = 8 - 6a$; $a \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand $BCRQ$ liegt, zur Ebenenschar gehören.
Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.
Berechnen Sie den Schnittwinkel φ von E_0 und E_2.
Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel φ ein?

c) Der Deckel der Truhe ist um die Kante QR drehbar.
Durch Drehung des Deckels um $90°$ wird die Truhe geöffnet. In welcher Ebene E_a liegt der Deckel dann?
Der Punkt P geht bei dieser Drehung in den Punkt P^* über.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P^*.

Aufgabe B2

Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $ABCD$ mit $A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$ und als Dachfläche das Viereck $EFGH$ mit $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$ und $H(0|0|8)$ (Koordinatenangaben in Meter).

a) Stellen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche $EFGH$ liegt.
Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche?
Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche.
(Zwischenergebnis: E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$)

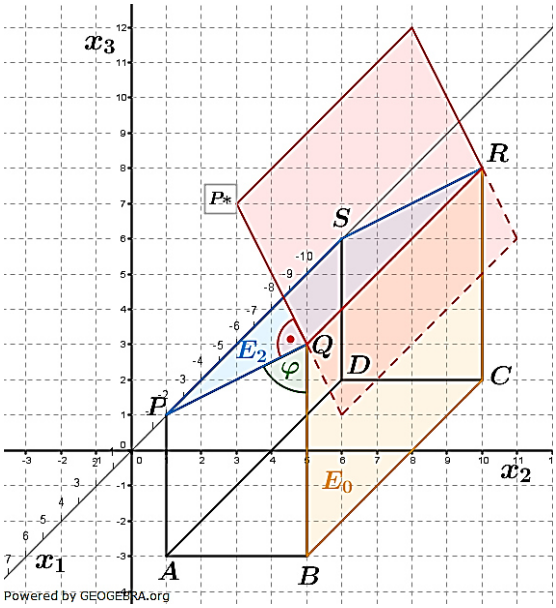
b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt $L(d|d|d)$ angebracht werden. Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben.
Bestimmen Sie d.

c) Eine Person mit $1{,}7\,m$ Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5|1|0)$ aus in positiver x_2 –Richtung.
Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Truhe in Koordinatensystem:*
Siehe nebenstehende Grafik.
Volumen der Truhe:
Die Truhe ist ein Prisma mit der Grundfläche $ABQP$ und der Höhe $\overline{BC}$.
Koordinatengleichung der Ebene:
Wir bilden das Kreuzprodukt aus $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}$ und machen eine Punktprobe mit P.



b) *Nachweis der Ebenenschar:*
Der Nachweis erfolgt über einen Koeffizientenvergleich.
Nachweis der Schnittgeraden:
Wir bilden $E_1 \cap E_a$.
Schnittwinkel φ:
Berechnung über die Schnittwinkelgleichung zweier Vektoren $\overrightarrow{n_{E_0}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$.
Zweite Ebene mit gleichem φ:
Für die andere Ebene gilt Schnittwinkel von $\overrightarrow{n_{E_a}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ ist gleich Schnittwinkel von $\overrightarrow{n_{E_0}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$.

c) *Bestimmung der Koordinaten von P^*:*
Die Strecke $\overline{QP}$ ist gleich der Strecke $\overline{QP^*}$. Die Ebene durch P^*, Q und S steht senkrecht auf der Ebene $PQRS$. P^* liegt auf der Geraden durch Q mit dem Normalenvektor von E_{PQRS} als Richtungsvektor.

Klausuraufschrieb

a) *Volumen der Truhe:*

$V_{Truhe} = A_{ABPQ} \cdot \overline{BC}$

$A_{ABPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{AP}\right| + \left|\overrightarrow{BQ}\right|\right) \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \qquad \overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 4; \quad \left|\overrightarrow{BQ}\right| = 6; \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 4; \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = 10$

$V_{Truhe} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 6) \cdot 4 \cdot 10 = 200$

Die Truhe hat ein Volumen von $200\,VE$.

Koordinatengleichung Ebene E_{Deckel}:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{Deckel}}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} = (-20) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_{Deckel}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$E_{Deckel}: \; x_2 - 2x_3 = d$

$E_{Deckel}: \; 4 - 2 \cdot 4 = d \implies d = -4 \qquad |$ Punktprobe mit P

$E_{Deckel}: \; x_2 - 2x_3 = -4$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

b) *Nachweis der Ebenenschar:*

E_a: $x_2 - ax_3 = 8 - 6a$

E_{Deckel}: $x_2 - 2x_3 = -4$

$8 - 6a = -4 \Longrightarrow \ a = 2$

E_2: $x_2 - 2x_3 = -4 = E_{Deckel}$

$E_{Rückwand}$:

Die Ebene ist parallel zur x_1x_3–Koordinatenebene im Abstand $x_2 = 8$.

$E_{Rückwand}$: $x_2 = 8$

$8 - 6a = 8 \ \Longrightarrow \ a = 0$

E_0: $x_2 = 8 = E_{Rückwand}$

Die Ebene des Deckels und die Ebene der Rückwand gehören zur Ebenenschar E_a.

Nachweis der Schnittgerade:

Die Schnittgerade von E_0 und E_2 ist die Gerade durch Q und R (siehe Skizze) mit der Gleichung g_{QR}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R}$

$g_{QR} \cap E_a$

$x_1 = 6 + t; \ x_2 = 8; \ x_3 = 6$

E_a: $8 - 6a = 8 - 6a$: | wahre Aussage

Die Gerade g_{QR} ist Schnittgerade aller E_a.

Schnittwinkel E_0 mit E_2:

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{E_2}} \circ \overrightarrow{n_{E_0}}|}{|\overrightarrow{n_{E_2}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_0}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) = 63{,}43\,°$

Die Ebenen E_0 und E_2 schneiden sich unter etwa $63{,}4\,°$.

Zweite Ebene mit gleichem φ:

$$cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{E_a}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_a}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$\sqrt{1 + a^2} = |1 + 2a|$ | ^{2}

$1 + a^2 = 4a^2 + 4a + 1$

$3a^2 + 4a = 0$

$a(3a + 4) = 0 \Longrightarrow \ a_1 = 0; \ \ a_2 = -\frac{4}{3}$

Die Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$ schließt mit E_2 denselben Winkel ein wie mit E_0.

c) *Bestimmung der Koordinaten von P^*:*

Ebene des Deckels bei Öffnung der Truhe um $90\,°$.

$\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{n_{E_2}} = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 + 2a = 0 \ \Longrightarrow \ a = -\frac{1}{2}$

Der um $90\,°$ gedrehte Deckel liegt in der Ebene $E_{-\frac{1}{2}}$.

Koordinaten des Punktes P^*:

$$g_{QP^*}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QP^*}| = |\overrightarrow{OP^*} - \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{20}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8+t-8 \\ 6-2t-6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{20} \qquad | \qquad ^2$$

$$5t^2 = 20$$

$$t_{1,2} = \pm 2$$

Für $t_1 = 2$ liegt der zugehörige Punkt unterhalb von Q, kommt als Lösungspunkt nicht in Frage.

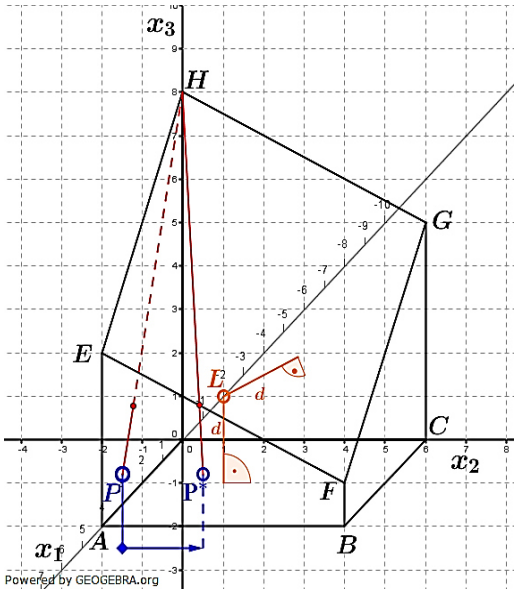
$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P^* hat die Koordinaten $P^*(6|6|10)$.

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Gebäude in Koordinatensystem:*
Siehe nebenstehende Grafik.
Koordinatengleichung Ebene E_{Dach}:
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{HG}$ und machen dann die Punktprobe mit H.
Neigungswinkel der Dachfläche:
Berechnung über die Schnittwinkelgleichung mit $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}$.
Dachfläche als Parallelogramm:
Nachweis über zwei gegenüberliegende, parallelen Seiten gleicher Länge.
Inhalt der Dachfläche:
Fläche des Parallelogramms über den Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes der beiden Seitenvektoren $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{HG}$.



b) *Bestimmung der Koordinaten von L:*
Die HNF von E mit der HNF der x_1x_2–Ebene gleichgesetzt führt zu den Koordinaten des Punktes L.

c) *Weg der Person, damit sie die Ecke H sieht:*
Die Sichtgerade der Person muss die Gerade durch die Punkte E und F schneiden. Die Wegstrecke ergibt sich dann aus der Differenz der x_2-Koordinaten von P und P^*.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung Ebene E_{Dach}:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{Dach}}} = \overrightarrow{HE} \times \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{Dach}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$

E_{Dach}: $2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 8 = d; \Rightarrow \; d = 16$ | Punktprobe mit H

E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$

Nachweis Parallelogramm der Dachfläche.

$$\overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{HE}| = \sqrt{32}$$

$$\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{GF}| = \sqrt{32}$$

Wegen $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} \wedge |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{GF}|$ ist das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm.

Inhalt der Dachfläche:

$$A_{EFGH} = \left|\overrightarrow{HE} \times \overrightarrow{HG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 12 \cdot \sqrt{9} = 36$$

Die Dachfläche beträgt $36\,m^2$.

b) *Bestimmung der Koordinaten von L:*

Abstand zur Dachfläche:

$h = \frac{|2d+d+2d-16|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5d-16|}{3}$

Abstand zur x_1x_2-Ebene:

$h = d$

Die beiden Abstände sollen gleich sein:

$d = \frac{|5d-16|}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{|5d-16|}{d} = 3$

$d_1 = 8; \quad d_2 = 2$

$d_1 = 8$ ist keine Lösung, da der Punkt $L(8|8|8)$ außerhalb des Gebäudes liegt.

Der Abstand der Lampe zum Boden und zum Dach beträgt $2\,m$. Die Koordinaten sind $L(2|2|2)$.

c) *Weg der Person, damit sie die Ecke H sieht:*

Die Sichtgerade muss die Dachkante $\overline{EF}$ schneiden, ab diesem Standpunkt der Person kann er die Ecke H sehen.

$$g_{EF}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

Sichtgerade:

$$g_{HP^*}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-a \\ -6{,}3 \end{pmatrix}; \; s \in \mathbb{R}$$

$g_{EF} \cap g_{EP^*}$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-a \\ -6{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

(1) $-5s = -4 \implies s = \frac{4}{5}$

(3) $-3r + 6{,}3s = 4$

$-3r + 6{,}3 \cdot \frac{4}{5} = 4 \implies r = \frac{26}{75}$

(2) $6r - s \cdot (1 - a) = 0$

(2) $6 \cdot \frac{26}{75} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}a \implies a = 1{,}6$

Die Person muss $1{,}6\,m$ *laufen, um die Ecke* H *zu sehen.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

Die Ebene E enthält die Punkte $A(6|1|0)$, $B(2|3|0)$ und $P(3|0|2{,}5)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1-Achse?
(Teilergebnis: $E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$)

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABP gleichschenklig ist.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck mit Diagonalenschnittpunkt P.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D.
Es gibt senkrechte Pyramiden mit Grundfläche $ABCD$ und Höhe 12.
Berechnen Sie die Koordinaten der Spitzen dieser Pyramiden.

c) Welche Punkte der x_1-Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse AB?

d) Gegeben ist ein senkrechter Kegel mit Grundkreismittelpunkt $M(0|0|0)$, Grundkreisradius 4 und Spitze $S(0|0|12)$.
Untersuchen Sie, ob der Punkt $R(2|2|3)$ innerhalb des Kegels liegt.

Aufgabe B2

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2 –Ebene die Meeresoberfläche ($1\,LE$ entspricht $1\,m$).
Zwei U-Boote U_1 und U_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit. Die Position von U_1 zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ (t in Minuten seit Beginn der Beobachtung).}$$

U_2 befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $A(68|135|-68)$ und erreicht nach drei Minuten den Punkt $B(-202|-405|-248)$.

a) Wie weit bewegt sich U_1 in einer Minute?
Woran erkennen Sie, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche weg bewegt?
Welchen Winkel bildet die Route von U_1 mit der Meeresoberfläche?

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von U_2 in $\frac{m}{min}$.
Begründen Sie, dass sich die Position von U_2 zum Zeitpunkt t beschreiben lässt durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$$

Zu welchem Zeitpunkt befinden sich beide U-Boote in gleicher Tiefe?

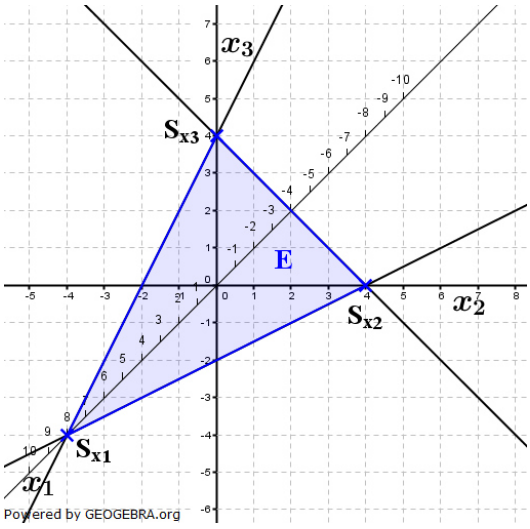
c) Welchen Abstand haben die beiden U-Boote zu Beobachtungsbeginn?
Aus Sicherheitsgründen dürfen sich die beiden U-Boote zu keinem Zeitpunkt näher als $100\,m$ kommen.
Wird dieser Sicherheitsabstand eingehalten?

d) Die Routen der beiden U-Boote werden von einem Satelliten ohne Berücksichtigung der Tiefe als Strecken aufgezeichnet. Diese beiden Strecken schneiden sich.
Wie groß ist der Höhenunterschied der zwei Routen an dieser Stelle?

Aufgabe 1

Lösungslogik

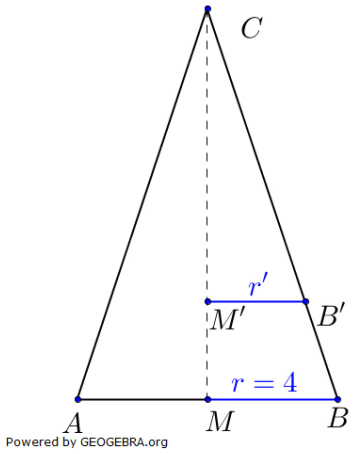
a) Wir erstellen die Koordinatengleichung durch Bildung des Normalenvektors über das Kreuzprodukt. Zum Einzeichnen der Ebene in das Koordinatensystem stellen wir die Achsenabschnittsform her zum Ablesen der Spurpunkte.
Schnittwinkelberechnung über Formel für Schnittwinkel Gerade/Ebene.

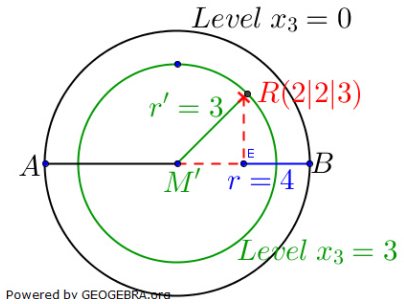


b) *Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABP:*
Zwei der Dreieckseiten müssen gleich lang sein.
Koordinaten von C und D:
Ermittlung der Punkte C und D über Vektoraddition.
Spitzen der Pyramide:
Die Spitzen der Pyramide errechnen sich über Vektoraddition und zwar aus $\overrightarrow{OP}$ zuzüglich/abzüglich 12 mal dem Einheitsvektor des Normalenvektors der Ebene, in der die Grundfläche der Pyramide liegt, nämlich $\frac{12}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E}$.

c) *Punkte auf der x_1–Achse, die zu A und B rechtwinklig sind.*
Sei $C(x_1|0|0)$ der Punkt auf der x_1–Achse, dann muss wegen Rechtwinkligkeit bei C das Skalarprodukt $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$ gelten.

d) *Lage des Punktes $R(2|2|3)$:*
Alternative 1: Vektorielle Lösung.
Wir stellen die Geradengleichung durch S und R auf und ermitteln deren Spurpunkt N der x_1x_2-Ebene. Ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{ON}$ kleiner als 4, liegt der Punkt innerhalb, ansonsten außerhalb des Kegels.
Alternative 2: Verwendung des 2. Strahlensatzes
Nebenstehende Abbildungen zeigen den Schnitt durch den Kegel sowie eine Draufsicht auf den Kegel.
Wir bestimmen den Radius r' des Kreises für $x_3 = 3$ über den zweiten Strahlensatz und prüfen dann, ob $\left|\overrightarrow{M'P}\right| < r'$ ist.





© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatenform der Ebene:*

Aufpunkt von g ist identisch mit Punkt C des Dreiecks.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ | Normalenform von E

$E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$ | Koordinatenform von E

$E\colon\ \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4} = 1$ | Achsenabschnittsform von E

$S_{x_1}(8|0|0);\quad S_{x_2}(0|4|0);\quad S_{x_3}(0|0|4)$

Für alle, die sich mit dem Kreuzprodukt nicht anfreunden können!!!

Die allgemeine Gleichung einer Ebene in Koordinatenform lautet:

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

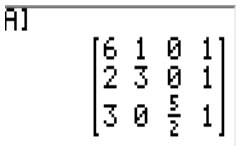
Wir machen mit den drei Punkten die Punktprobe und erhalten:

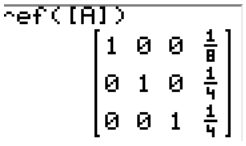
I) $6a + b = d$

II) $2a + 3b = d$

III) $3a + 2{,}5c = d$

$a = \frac{1}{8}d;\ b = \frac{1}{4}d;\ c = \frac{1}{4}d$





Der Parameter d ist nun frei wählbar und wir wählen $d = 8$.

Die Ebenengleichung lautet somit:

$E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

Schnittwinkel der Ebene mit der x_1–Achse:

Die x_1–Achse hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{rv} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{rv}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{3}$$

$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19{,}47\,°$

Die Ebene schneidet die x_1-Achse unter einem Winkel von ca. $19{,}5\,°$.

b) *Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABP:*

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{16{,}25}$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{16{,}25}$$

Wegen $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \wedge |\overrightarrow{AP}| \neq |\overrightarrow{AB}|$ ist das Dreieck ABP gleichschenklig.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

Koordinaten von C und D des Vierecks $ABCD$:

Wegen $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ gilt:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PD}$ gilt:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind $C(0|-1|5)$ und $D(4|-3|5)$.

Spitzen der Pyramiden über $ABCD$ mit einer Höhe von $12\,LE$.

Die Spitzen sind jeweils $12\,LE$ vom Punkt P in Richtung des Einheitsvektors des Normalenvektors der Ebene entfernt.

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{12}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \frac{12}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OP} - \frac{12}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \frac{12}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$$

Die beiden Spitzen haben die Koordinaten $S_1(7|8|10{,}5)$ und $S_2(-1|-8|-5{,}5)$.

c) *Punkte auf der x_1–Achse, die zu A und B rechtwinklig sind.*

Der Punkt auf der x_1–Achse sei $C(x_1|0|0)$. Dann gilt wegen Rechtwinkligkeit:

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 - x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(6 - x_1) \cdot (2 - x_1) + 3 = 0$$

$${x_1}^2 - 8x_1 + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1_1} = 5; \quad x_{1_2} = 3$$

Die Punkte $C(5|0|0)$ und $C^*(3|0|0)$ auf der x_1–Achse bilden mit der Hypothenuse AB ein rechtwinkliges Dreieck.

d) *Lage des Punktes $R(2|2|3)$:*

Alternative 1: Vektorielle Lösung (umständlich)

Geradengleichung durch S und R:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt N der Geraden g mit der x_1x_2–Ebene:

Für N als Spurpunkt gilt $x_3 = 0$.

$$12 - 9t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4}{3}$$

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{ON}| = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{2} < 4$$

Wegen $|\overrightarrow{ON}| < r$ liegt der Punkt P innerhalb des Kegels.

Alternative 2: 2. Strahlensatz (einfachste Lösung)

Nach dem 2. Strahlensatz gilt (siehe Grafik in Klausuraufschrieb):

$$\frac{r'}{r} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM}}; \quad r' = r \cdot \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM}} = 4 \cdot \frac{9}{12} = 3$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Länge der Strecke $\overline{M'R}$

$\overline{M'R} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$

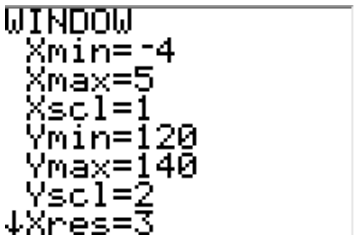
Wegen $\overline{M'R} < r'$ liegt der Punkt P innerhalb des Kegels.

Aufgabe 2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1=$\sqrt{(72+30X)^2 + (-30+90X)^2 + (-102+30X)^2}$



a) Der Richtungsvektor von U_1 beschreibt die Bewegung pro Minute, da t in Minuten gegeben ist. Strecke in einer Minute somit $|\overrightarrow{rv_{U_1}}|$.
Die x_3–Koordinate des Richtungsvektors von U_1 ist negativ, also befindet sich das U–Boot auf Tauchfahrt.
Winkelberechnung über Formel für Schnittwinkel Gerade/Ebene.

b) U_2 benötigt $3\,min$ um von A nach B zu kommen, also ist die Geschwindigkeit $\frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{AB}|$.
Bewegungsgerade von U_2 über die Zweipunkteform aufstellen.
Die Tiefe der U-Boote wird durch die x_3-Koordinate bestimmt, also Gleichsetzung von $x_{3_{U_1}}$ und $x_{3_{U_2}}$.

c) Abstand der U-Boote zu Beobachtungsbeginn entspricht der Strecke zwischen den beiden Aufpunkten der Bewegungsgeraden von U_1 und U_2. Die kleinste Entfernung ergibt sich über die Abstandsfunktion zweier Punkte auf je einer Bewegungsgeraden. Das Minimum des Graphen der Funktion bestimmt die Lösung (per GTR).

d) Der Satellit kann nur die Erdoberfläche beobachten. Der gesuchte Schnittpunkt ist dadurch der Schnittpunkt der beiden U-Bootgeraden ohne Berücksichtigung der x_3–Ebene. Dann werden für den gefundenen Parameter t die x_3–Koordinaten (Tiefen) von U_1 und U_2 ermittelt und die Differenz gebildet.

Klausuraufschrieb

a) *Bewegung des U-Bootes U_1:*

$$\left|\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2(-30)^2} = \sqrt{12600} \approx 112{,}25$$

U_1 legt in einer Minute ca. $112\,m$ zurück.

Bewegungsrichtung von U_1:

Die x_3–Koordinate des Richtungsvektors von U_1 ist negativ.

U_1 befindet sich auf Tauchfahrt.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

Winkel zwischen Bewegungsgeraden und Meeresoberfläche:

Normalenvektor der x_1x_2–Ebene (Meeresoberfläche) ist $n_E = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{rv}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right|} = \frac{30}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{12600}}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{30}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{12600}}\right) \approx 15{,}5\,°$$

Die Route von U_1 bildet mit der Meeresoberfläche einen Winkel von ca. $15{,}5\,°$.

b) *Geschwindigkeit von U_2:*

$$s = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}-202-68\\-405-135\\-248+68\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-270)^2 + (-540)^2 + (-180)^2} = 630$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{630}{3} \cdot \frac{m}{min} = 210\,\frac{m}{min}$$

U_2 bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $210\,m$ pro Minute.

Bewegungsgerade von U_2:

$$g_{U_2}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \frac{t}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}68\\135\\-68\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-90\\-180\\-60\end{pmatrix}$$ **q.e.d**

Zeitpunkt gleicher Tiefe von U_1 und U_2:

$x_{3_{U_1}} = x_{3_{U_2}}$.

$-170 - 30t = -68 - 60t \quad \Longrightarrow \quad t = 3{,}4$

$3{,}4\,min$ nach Beobachtungsbeginn sind die beiden U-Boote in gleicher Tiefe.

c) *Abstand der U-Boote bei Beobachtungsbeginn:*

Aufpunkt : $P(140|105|-170)$

$$l = |\overrightarrow{PA}| = \left|\begin{pmatrix}140-68\\105-135\\-1700+68\end{pmatrix}\right| = \sqrt{72^2 + (-30)^2 + (-72)^2} = 128{,}41$$

Zu Beobachtungsbeginn sind die U-Boote ca. $128\,m$ voneinander entfernt.

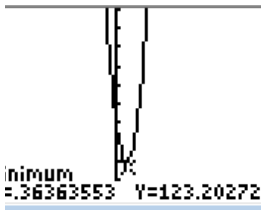
Kleinste Entfernung der beiden U-Boote.

Die Abstandsfunktion lautet:

$$d = \sqrt{\left(\overrightarrow{x_{U_2}} - \overrightarrow{x_{U_1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}68\\135\\-68\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-90\\-180\\-60\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}140\\105\\-170\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\begin{pmatrix}-72\\30\\102\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-30\\-90\\-30\end{pmatrix}\right)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{(72+30t)^2 + (-30+90t)^2 + (-102+30t)^2}$$



$d(t)_{min} \overset{GTR}{\approx} 123{,}2$ für $t \overset{GTR}{\approx} 0{,}363$.

Der kleinste Abstand beträgt $123{,}2\,m$. Wegen $123{,}2 > 100$ wird der Sicherheitsabstand der beiden U-Boote voneinander eingehalten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

d) *Höhenunterschied der U-Bootrouten bei Satellitenbeobachtung.*

$g_{U_1} \cap g_{U_2}$ ohne Berücksichtigung von x_3:

$$t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
B]
[[-90   60 72 ]
 [-180 90 -30]
 [0    0  0  ]]
ref([B])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{46}{15} \\ 0 & 1 & \frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $t = \frac{46}{15}$ und $s = \frac{29}{5}$.

$x_{3_{U1}} = -170 + \frac{29}{5} \cdot (-30) = -344$

$x_{3_{U2}} = -68 + \frac{46}{15} \cdot (-60) = -252$

Der Höhenunterschied beträgt $92\,m$.

Aufgabe B1

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$ und $R(0|0|6)$.
Gegeben ist außerdem die Ebene E: $3x_2 + x_3 = 8$.

a) Stellen Sie den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. Bestimmen Sie den Abstand von E zur x_1–Achse.

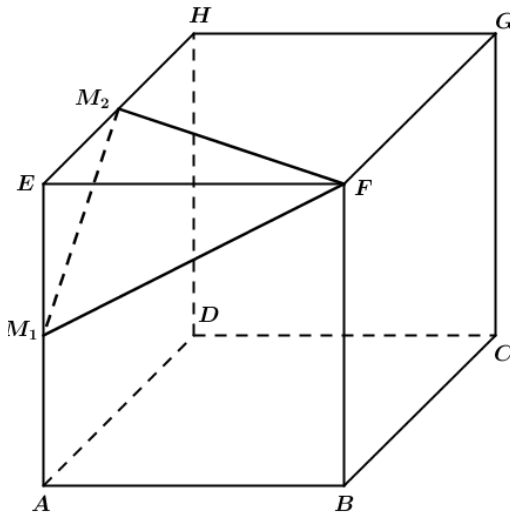
b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch E_a: $3x_2 + x_3 = a$; $a \in \mathbb{R}$.
Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
Für welchen Wert von a hat der Punkt $S(6|6|6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a?
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel?

Aufgabe B2

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $H(0|0|8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Inhalt des Segeltuchs.
(Teilergebnis:
S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?

b) Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch.
In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?

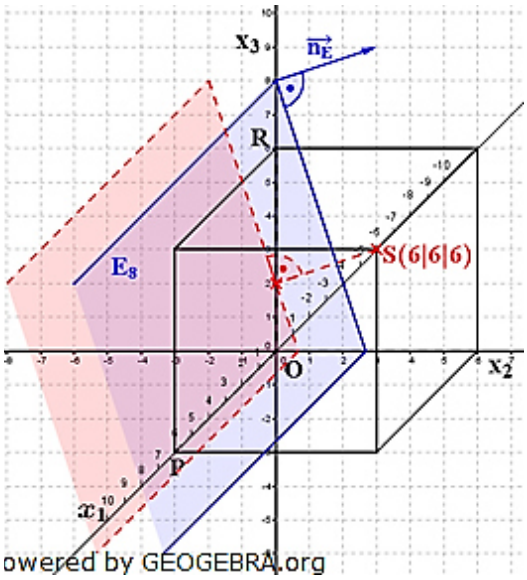


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1

Lösungslogik

a) Zum Einzeichnen der Ebene bilden wir die Achsenabschnittsform, um die Spurpunkte abzulesen. Die Ebene hat keine x_1–Koordinate, somit verläuft sie parallel zur x_1–Achse.
Schnittwinkelberechnung über die Schnittwinkelbestimmung zweier Vektoren, hier $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}$.
Zur Abstandsberechnung der Ebene mit der x_1–Achse bestimmen wir den Abstand vom Ursprung zur Ebene über die HNF.



b) Die Ebenen liegen parallel zueinander, da alle E_a denselben Normalenvektor besitzen.
Wir bestimmen a über den Abstand von S zu E_a über die HNF.
Die Ebenen E_a haben solange gemeinsame Punkte mit dem Würfel, solange E_a den Würfel schneidet. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass dies ab dem a gilt, für welches die Ebene E_a den Punkt O enthält, bis zu dem a, für welches die Ebene E_a den Punkt S enthält. Beide a ermitteln wir durch Punktproben von O und S mit E_a.

Klausuraufschrieb

a) *Spurpunkte zum Einzeichnen der Ebene E:*

$E\colon \frac{x_2}{\frac{8}{3}} + \frac{x_3}{8} = 1 \implies S_{x_2}\left(0\left|\frac{8}{3}\right|0\right);\quad S_{x_3}(0|0|8)$

E hat keinen Spurpunkt mit der x_1–Achse, E verläuft parallel zur x_1–Achse.

Schnittwinkel von E mit x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_1}}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_1}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = 71{,}57\,°$$

E schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $71{,}6\,°$.

Abstand von E zur x_1–Achse:

Entspricht dem Abstand von z.B. $O(0|0|0)$ zu E.

$$d = \frac{|3\cdot0+0-8|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

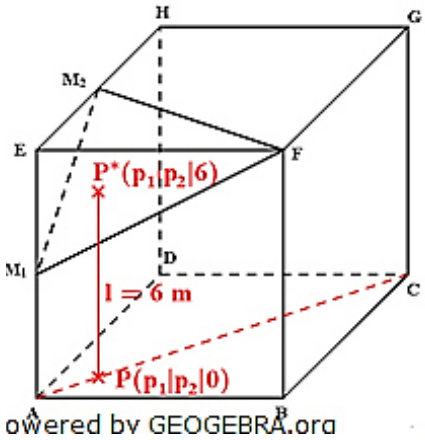
E hat zur x_1–Achse einen Abstand von $\frac{4}{5}\sqrt{10}\,LE$.

b) *Der Normalenvektor aller E_a ist $\overrightarrow{n_{E_a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit sind die Ebenen der Ebenenschar zueinander parallel.*
a für Abstand $\sqrt{10}$ von $S(6|6|6)$:
$d = \sqrt{10} = \frac{|3 \cdot 6 + 6 - a|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|24-a|}{\sqrt{10}}$
$|24 - a| = 10 \Longrightarrow \quad a_1 = 14; \quad a_2 = 34$
Der Punkt $S(6|6|6)$ hat von E_{14} und von E_{34} den Abstand $\sqrt{10}$.
a für gemeinsame Punkte mit dem Würfel.
Gemeinsame Punkte liegen vor, wenn die Ebene den Würfel schneidet. Die Grenze auf der linken Seite des Würfels ist die Ebene E_a, in der der Ursprung O liegt. Die Grenze auf der rechten Seite des Würfels ist die Ebene E_a, die den Punkt S enthält.
Die Ebene E_0 enthält den Ursprung.
Die Ebene E_{24} enthält den Punkt S.
Für $0 \leq a \leq 24$ hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Lösung B2

Lösungslogik

a) Wir bestimmen zunächst die Koordinaten der Punkte E, F, M_1 und M_2. Normalenvektor $\overrightarrow{n_S} = \overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2}$ und daraus die Koordinatengleichung der Ebene mit dem Aufpunkt F.
Zwei Seiten des Dreiecks FM_1M_2 müssen gleich lang sein.
Fläche des Segeltuchs über den halben Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes aus $\overrightarrow{FM_1}$ und $\overrightarrow{FM_2}$.
Abstand von E zu S über die HNF.



b) Wir bestimmen die Koordinaten von P auf der Geraden durch A und C über eine Punktprobe. Wir bestimmen die Koordinaten von P^* über eine Punktprobe mit S.
Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (p_1 und p_2), über das p_1 und p_2 bestimmt werden können.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinaten der Punkte E, F, M_1 und M_2.*
$E(8|0|8); \quad F(8|8|8); \quad M_1(8|0|4); \quad M_2(4|0|8)$
Ebene S:

$$k \cdot \overrightarrow{n_S} = \overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} = (-16) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$S\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ | Normalenform von S

$S\colon\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$ | Koordinatenform von S

Form des Segeltuchs:

$$|\overrightarrow{FM_1}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$$

$$|\overrightarrow{FM_2}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

Wegen $|\overrightarrow{FM_1}| = |\overrightarrow{FM_2}| \neq |\overrightarrow{M_1M_2}|$ ist das Dreieck FM_1M_2 gleichschenklig.

Fläche des Segeltuchs:

$$A_{Tuch} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix}\right| = \frac{16}{2} \cdot \sqrt{9} = 24$$

Das Segeltuch hat eine Fläche von $24\,m^2$.

Abstand des Segeltuchs von E:

$$d = \frac{|2 \cdot 8 - 0 + 2 \cdot 8 - 24|}{\sqrt{9}} = \frac{|8|}{3}$$

Der Abstand des Segeltuchs vom Punkt E beträgt $\frac{8}{3}\,m$.

b) *Fußpunkt der Stange:*

Gerade g durch A und C:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};\ \ s \in \mathbb{R}$$

$P \in g$:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \ s \in \mathbb{R}$$

(1) $\quad p_1 = 8 + s$

(2) $\quad p_2 = -s \Longrightarrow\ s = -p_2$

$s \longrightarrow (1)$

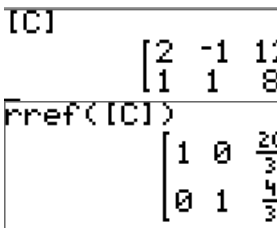
(1) $\quad p_1 = 8 - p_2 \Longrightarrow\ p_1 + p_2 = 8$

$P^* \in S$:

(2') $\quad 2p_1 - p_2 + 12 = 24$

$\quad 2p_1 - p_2 = 12$

(1) $\quad p_1 + p_2 = 8$



Das LGS ist eindeutig lösbar für $p_1 = \frac{20}{3}$ und $p_2 = \frac{4}{3}$.

Das untere Ende der $6\,m$ hohen Stange befindet sich im Punkt $P\left(\frac{20}{3} \middle| \frac{4}{3} \middle| 0\right)$.

Aufgabe B1

Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|0)$, $B(5|5|0)$, $C(-5|5|0)$ und $D(-5|-5|0)$. Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(0|0|12)$.

a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.

b) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben. Einer dieser Quader hat den Eckpunkt $Q(2{,}5|2{,}5|0)$.
Berechnen Sie sein Volumen.
Bei einem anderen Quader handelt es sich um einen Würfel.
Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS?

Aufgabe B2

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A(10|6|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(10|0|3)$ ist im Punkt $F(5|6|0)$ ein $2\,m$ langer Stab befestigt, der in x_3-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(8|10|2)$, (Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt. Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.
(Teilergebnis: $E\colon\ x_2 + 2x_3 = 6$)

b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Ende des Stabes.
Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

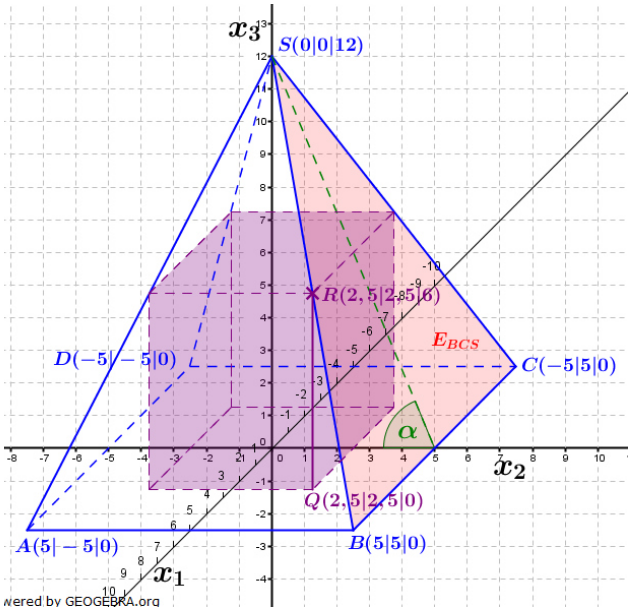
c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur x_1x_2–Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1

Lösungslogik

a) Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass es sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt.
Koordinatengleichung BCS über das Kreuzprodukt von $\overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{BS}$ ergibt Normalenvektor und dieser zusammen mit dem Punkt B die Normalengleichung bzw. Koordinatengleichung der Ebene.
Schnittwinkelberechnung über die Schnittwinkelbestimmung der Normalenvektoren, hier $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}$.
Fläche des Dreiecks entspricht der Hälfte des ungekürzten Betrages des Kreuzproduktes von $\overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{BS}$.



b) Da die Pyramide eine quadratische Grundfläche hat, muss auch der Quader mit dem einen Eckpunkt $Q(2{,}5|2{,}5|0)$ eine quadratische Grundfläche haben. Die Kantenlänge dieser Grundfläche ist somit $5\,LE$. Für die Höhe des Quaders benötigen wir den Betrag des Vektors $|\overrightarrow{QR}|$ (siehe Zeichnung). Hierzu schneiden wir die Gerade durch Q mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{r_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Geraden durch B und S.
Für den Würfel muss die Kantenlänge a der Grundfläche (des Würfels) mit dem Betrag des Vektors $|\overrightarrow{QR}| = a$ übereinstimmen. Punkt Q hat dann die Koordinaten $Q^*\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|0\right)$. Wir schneiden die Gerade durch Q^* mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{r_v^*} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Geraden durch B und S und erhalten dadurch a. Die Koordinaten des Punktes sind dann $R^*\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|a\right)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2014 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene BCS:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \ 12x_2 + 5x_3 = 60$$

Schnittwinkel von E mit x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_1}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_1}}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|5|}{\sqrt{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 67{,}38\,°$$

E schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $67{,}4\,°$.

Flächeninhalt Dreieck BCS:

$$A_{BCS} = 0{,}5 \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}| = 0{,}5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} \right| = 65$$

Das Dreieck BCS hat einen Flächeninhalt von $65\,FE$.

b) Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche, also muss auch der einbeschriebene Quader eine quadratische Grundfläche haben. Wegen $Q(2{,}5|2{,}5|0)$ ist die Kantenlänge des Quaders $5\,LE$. Die Höhe des Quaders entspricht der x_3–Koordinate des Schnittpunktes der Geraden durch B und S mit der senkrechten Gerade durch Q.

$$g_{BS}: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$g_{QR}: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{BS} \cap g_{QR}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-5r = -2{,}5 \ \Rightarrow \ r = \frac{1}{2}$$

$$12r - s = 0 \Rightarrow \ s = 6$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = 6$$

$$V_{Quader} = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$$

Der Quader hat ein Volumen von $150\,VE$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Eckpunkt des Würfels auf der Kante BS:

$Q\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|0\right);\ R\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|a\right)$

$$g_{QR}: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + a \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\0\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$g_{BS} \cap g_{QR}$

$$r \cdot \begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{2}-5\\\frac{a}{2}-5\\0\end{pmatrix}$$

$-5r = \frac{a}{2} - 5 \implies r = 1 - \frac{a}{10}$

$12r - a = 0$

$12\left(1 - \frac{a}{10}\right) - a = 0$

$12 - 1{,}2a - a = 0$

$12 = 2{,}2a \implies a = \frac{60}{11}$

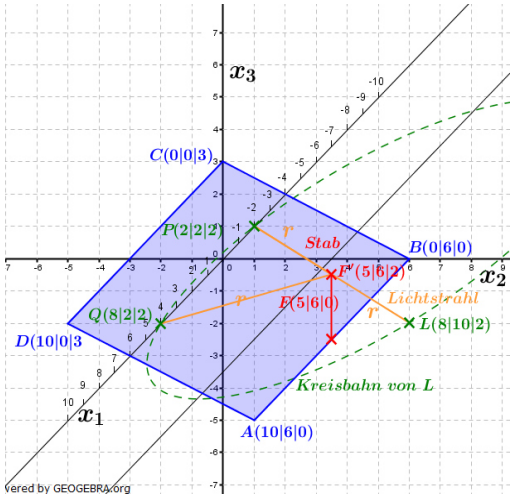
Die Koordinaten des Eckpunktes des Würfels auf der Kante BS lauten

$R\left(\frac{30}{11}\middle|\frac{30}{11}\middle|\frac{60}{11}\right)$.

Lösung B2

Lösungslogik

a) Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Über den Aufpunkt A und dem Normalenvektor stellen wir die Koordinatengleichung der Ebene auf. Zeichnung siehe Grafik rechts.
Der Winkel zwischen Stab und Platte ist der Schnittwinkel der Geraden durch F mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und der Ebene E.



b) Schatten des Stabes:
Wir müssen den Schnittpunkt der Geraden durch L und die Mastspitze mit der Ebene E ermitteln und erhalten dadurch die Koordinaten des Schattenpunktes des oberen Ende des Stabes.
Liegt dieser Schattenpunkt innerhalb der Platte und der Fußpunkt des Stabes ebenfalls, liegt der Schatten des Stabes vollständig auf der Platte. Zum schnellen Nachweis benötigen wir hier allerdings die Parametergleichung der Ebene E.

c) Der Radius der Kreisbahn entspricht der Länge zwischen dem Punkt L und der Stabspitze.
Es müssen Punkte auf der Platte existieren (in der Grafik mit P und Q bezeichnet), deren Länge zwischen der Stabspitze und den Punkten P bzw. Q dem Radius der Kreisbahn entsprechen.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) $k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E\colon\ 6 + 2 \cdot 0 = d \implies d = 6$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ x_2 + 2x_3 = 6$ | Koordinatenform von E

Winkel zwischen dem Stab und der Platte:

$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_{v_g}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{r_{v_g}}|}$ mit $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{r_{v_g}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}44\,°$

Der Winkel zwischen dem Stab und der Platte beträgt ungefähr $63{,}4°$.

b) *Koordinaten des Schattenpunktes des oberen Ende des Stabes:*
Der Stab ist $2\,m$ lang. Koordinaten der Stabspitze: $F'(5|6|2)$
Gerade durch L und F':

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LF'}$

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \cap E$

$x_1 = 8 - 3r;\ \ x_2 = 10 - 4r;\ \ x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \longrightarrow\ E$

$10 - 4r + 2 \cdot 2 = 6$

$4r = 8 \Longrightarrow\ r = 2$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt hat die Koordinaten $S(2|2|2)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2014 BW

Nachweis, dass der Schattenpunkt auf der Platte liegt:

Parametergleichung von E:

$$E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit S:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$-10s = -8 \Longrightarrow \quad s = 0{,}8$

$-6t = -4 \Longrightarrow \quad t = \frac{2}{3}$

Wegen $0 < s; t < 1$ *liegt der Schattenpunkt der Stabspitze auf der Platte.*

Punktprobe mit F:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-10s = -5 \Longrightarrow \quad s = 0{,}5$

$-6t = 0 \Longrightarrow \quad t = 0$

Wegen $0 < s < 1 \wedge t = 0$ *liegt der Fußpunkt des Stabes auf der Plattenkante.*
Somit liegt der Schatten des Stabes vollständig auf der Platte.

c) *Radius der Kreisbahn:*

$r = \left|\overrightarrow{LF'}\right| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Die gesuchten Punkte seien $P(p_1|p_2|2)$ und $Q(q_1|q_2|2)$.

Dann gilt: $\left|\overrightarrow{PF'}\right| = \sqrt{(5 - p_1)^2 + (6 - p_2)^2} = 5$

P ist Punkt der Ebene, somit:

$p_2 + 2 \cdot 2 = 6 \Longrightarrow \quad p_2 = 2$

$p_2 \longrightarrow \left|\overrightarrow{PF'}\right|$

$\sqrt{(5 - p_1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(5 - p_1)^2 + 16} = 5 \qquad | \qquad \uparrow^2$

$(5 - p_1)^2 + 16 = 25$

$(5 - p_1)^2 = 9 \qquad | \qquad \sqrt{}$

$|5 - p_1| = 3$

$5 - p_1 = 3 \Longrightarrow \quad p_{1_1} = 2$

$5 - p_1 = -3 \Longrightarrow \quad p_{1_2} = 8$

Wegen der entstandenen quadratischen Gleichung ist $p_{1_2} = q_1$.

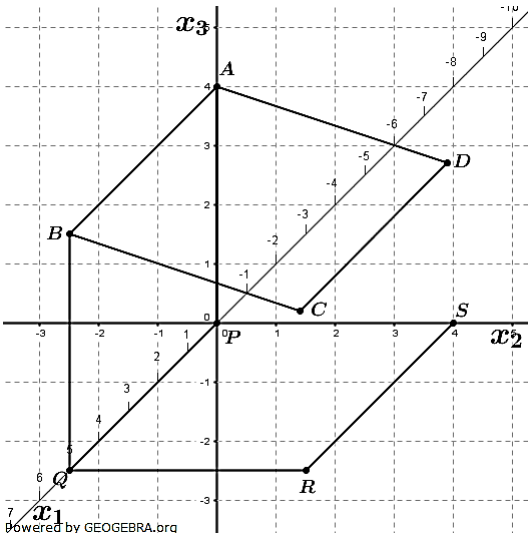
(Wer das nicht glaubt, kann denselben Rechenweg nochmals mit $Q(q_1|q_2|2)$ nachrechnen).

Die beiden Punkte haben die Koordinaten $P(2|2|2)$ *und* $Q(8|2|2)$.

Aufgabe B1

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $P(0|0|0)$, $Q(5|0|0)$, $S(0|4|0)$ die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $A(0|0|4)$, $B(5|0|4)$, $C(5|3{,}9|2{,}7)$, $D(0|3{,}9|2{,}7)$ beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter).

Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3-Ebene beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand.

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine $30\,cm$ hohe Stablampe. Am Markisenrand $\overline{CD}$ wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um $\overline{CD}$.
Kann der Regenschutz dabei die Stablampe berühren?
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stablampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert.

c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird.
Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Aufgabe B2

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g_4 mit der Ebene E.
Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4?

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Für welche Werte von a mit $-10 \leq a \leq 10$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $10\,°$?

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene F: $x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5|1|1)$ geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

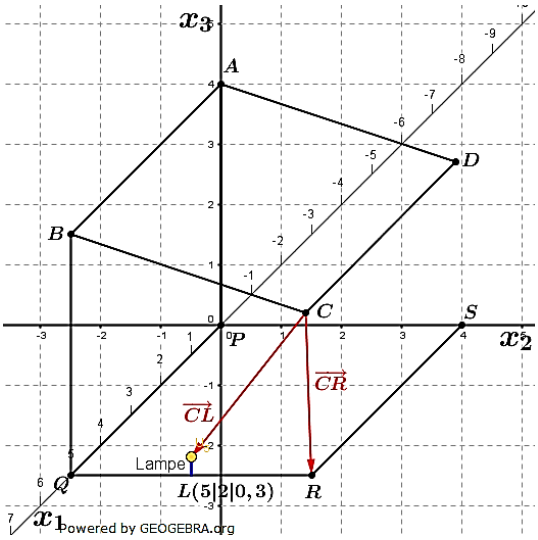
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

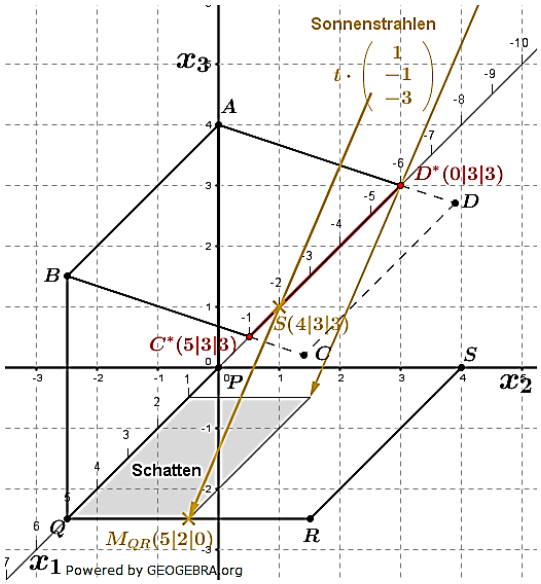
Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Zusammen mit dem Punkt A ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Winkel zwischen Markise und Hauswand:
Berechnung über den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Der Normalenvektor von E ist bereits errechnet, der Normalenvektor der x_1x_3-Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *Berührung der Lampe:*
Wir bestimmen zunächst die Koordinaten des oberen Lampenpunktes L.
Der Punkt C liegt auf $2{,}7\,m$ Höhe. Damit ist der Regenschutz $2{,}7\,m$ lang. Er berührt dann die Lampe, wenn der Betrag des Vektors $\overrightarrow{CL}$ kleiner als $2{,}7$ ist.
Höchstabstand Lampe:
Der Abstand der Lampe von der Hauswand wird durch die x_2–Koordinate l_2 der Lampe bestimmt. Der Höchstabstand ergibt sich durch Gleichsetzung der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{CR}$ und $\overrightarrow{CL}$, wobei die Koordinaten der Lampenspitze $L(5|l_2|0{,}3)$ sind.



c) *Begründung, dass Terrasse nicht vollständig beschattet wird:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise nach Einfahren derselben:
Der Mittelpunkt des Terrassenrandes hat die Koordinaten $M_{QR}(5|2|0)$. Einer der Sonnenstrahlen muss damit dort auftreffen. Die Markise muss soweit zurückgefahren werden, dass der Schnittpunkt S der Markisenebene E mit einer Geraden durch den Punkt M_{QR} mit Richtungsvektor des Einfallvektors der Sonnenstrahlen auf die zurückgefahrene Markisenkante C^*D^* zu liegen kommt. Hieraus lassen sich dann die Koordinaten der Markiseneckpunkte bestimmen.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}5 \\ 19{,}5 \end{pmatrix} = 6{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_2 + 3x_3 = d$ | Punktprobe mit $A(0|0|4)$

$E\colon\ 0 + 3 \cdot 4 = d \quad \Longrightarrow \quad d = 12$

$E\colon\ x_2 + 3x_3 = 12$

Schnittwinkel von E mit x_1x_3-Ebene:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x_1x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_3}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{10}}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = 71{,}565\,°$

E schneidet die x_1x_3-Ebene unter einem Winkel von etwa $71{,}6\,°$.

b) *Berührung der Lampe:*

Lampenspitze $L(5|2|0{,}3)$

$|\overrightarrow{CL}| = \sqrt{(5-5)^2 + (2-3{,}9)^2 + (0{,}3-2{,}7)^2} = \sqrt{9{,}37} \approx 3{,}06$

Wegen $|\overrightarrow{CL}| > 2{,}7$ berührt der Regenschutz die Lampe nicht.

Höchstabstand Lampe:

Koordinaten der Lampenspitze sind nun $L(5|l_2|0{,}3)$

$|\overrightarrow{CL}| = \sqrt{(5-5)^2 + (l_2-3{,}9)^2 + (0{,}3-2{,}7)^2} = \sqrt{(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76}$

$|\overrightarrow{CL}| = 2{,}7$

$\sqrt{(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76} = 2{,}7$ | $\uparrow^2$

$(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76 = 7{,}29$ | $-5{,}76$

$(l_2-3{,}9)^2 = 1{,}53$ | $\sqrt{}$

$|l_2 - 3{,}9| = 1{,}24 \Longrightarrow l_{2_1} = 2{,}66$

$l_2 - 3{,}9 = 1{,}24 \Longrightarrow l_{2_2} = 5{,}14$

Wegen $|\overrightarrow{QR}| = 4$ entfällt die Lösung l_{2_1}.

Die Lampe darf höchstens $2{,}66\,m$ von der Hauswand entfernt sein.

c) *Begründung, dass Terrasse nicht vollständig beschattet wird:*

Die x_2–Richtung des Richtungsvektors der Sonnenstrahlen ist negativ, also gegen die Rückwand gerichtet.

Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise nach Einfahren derselben:

Mittelpunkt des Terrassenrandes ist $M_{QR}(5|2|0)$. Punkt soll im Schatten liegen, also muss Sonnenstrahl dort auftreffen.

$$g_{M_{QR}}\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g_{M_{QR}} \cap E\colon\ x_1 = 5 + t;\ x_2 = 2 - t;\ x_3 = -3t$

$2 - t + 3 \cdot (-3t) = 12$

$-10t = 10 \Longrightarrow t = -1$

$$t \longrightarrow g_{M_{QR}}\colon \quad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

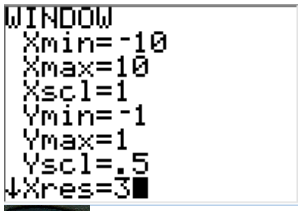
Der Sonnenstrahl schneidet die Ebene E in $S(4|3|3)$. Die Markise muss nun soweit zurückgefahren werden, dass der Punkt S auf der Kante C^*D^* zu liegen kommt. Da diese Kante parallel zur x_1–Achse verläuft (x_2- und x_3–Koordinate bleiben unverändert), ergeben sich die Koordinaten. $C^*(5|3|3)$ und $D^*(0|3|3)$.

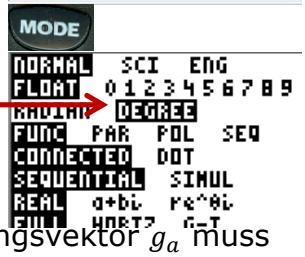
Aufgabe B2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1$=|3X+6|/(\sqrt{X^2+1})*\sqrt{61})-sin\,(10)$





Achtung: GTR-MODE muss auf *DEGREE* stehen.

a) *Schnittpunkt von g_4 mit E:*
Wir bilden $g_4 \cap E$.
Gerade der Schar orthogonal zu g_4:
Das Skalarprodukt aus Richtungsvektors g_4 und Richtungsvektor g_a muss Null sein. Hieraus errechnet sich a.

b) *Schnittwinkel von g_4 mit E:*
Wir verwenden die Schnittwinkelformel mit $\sin(\varphi) = \cdots$ für Schnittwinkel aus Gerade und Ebene.
Werte von a für $\varphi = 10\,°$:
Es gilt: $sin(10°) = \frac{|\overrightarrow{rv_{ga}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{ga}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$. Lösung per GTR.

c) *Begründung alle g_a in F:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Gleichung der Geraden h:
Die Gerade h hat nach Aufgabenstellung denselben Aufpunkt wie die Geradenschar g_a. Soll h nicht zur Geradenschar gehören, so muss sie einen Richtungsvektor haben, der durch den Richtungsvektor von g_a nicht abgebildet werden kann. Dies ist z. Bsp. mit $\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ der Fall., da die x_2-Komponente von $\overrightarrow{rv_{ga}}$ nie Null werden kann.

Klausuraufschrieb

a) *Schnittpunkt von g_4 mit E:*

g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

$x_1 = 5 + 4t; \quad x_2 = 1 + t; \quad x_3 = 1$

$g_4 \cap E$:

$3(5+4t) + 6(1+t) + 4 \cdot 1 = 16$

$15 + 12t + 6 + 6t + 4 = 16$

$18t = -9 \quad \Longrightarrow \quad t = -0{,}5$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$

g_4 schneidet E in $S(3|0{,}5|1)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Gerade der Schar orthogonal zu g_4:

$\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{rv_{ga}} = 0$

$\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$4a + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$

Die Gerade $g_{-\frac{1}{4}}$ schneidet g_4 orthogonal in $P(5|1|1)$.

b) *Schnittwinkel von g_4 mit E:*

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{g4}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}\right) = 33{,}9841°$

Der Schnittwinkel g_4 mit E beträgt etwa $34\,°$.

Werte von a für $\varphi = 10\,°$:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{g4}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} = sin\,(10°)$$

$\frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} - sin(10°) = 0$

$a_1 = -3{,}7581; \quad a_2 = -1{,}2694$

Für $a = -3{,}8 \vee a = -1{,}3$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $10\,°$.

c) *Begründung alle g_a in F:*

Die Ebene F mit F: $x_3 = 1$ liegt parallel zur x_1x_2–Ebene im Abstand $x_3 = 1$. Alle Geraden der Schar g_a verlaufen ebenfalls parallel zur x_1x_2–Ebene, da die x_3–Komponente des Richtungsvektors 0 ist. Der Abstand aller Geraden zur x_1x_2–Ebene ist ebenfalls 1, da die x_3–Komponente des Aufpunktes $x_3 = 1$ ist, also verlaufen alle g_a in F.

Gleichung der Geraden h in F:

Stützvektor von h: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

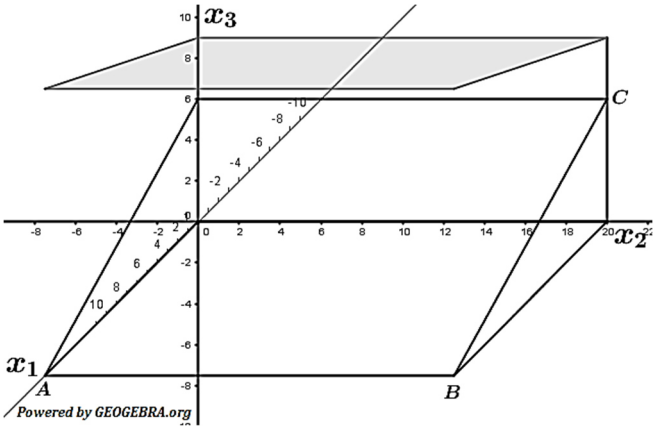
Richtungsvektor von : $\overrightarrow{rv_h} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ kann von $t \cdot \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$ nie abgebildet werden.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$

Aufgabe B1.1

In einem Koordinatensystem be-schreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche einer Tribüne (alle Koordinatenangaben in Meter).
Die x_1x_2-Ebene stellt den Erdboden dar.
Die Eckpunkte der Dachfläche liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche. Die Dachfläche liegt in der durch $E\colon x_1 - 3x_3 = -27$ beschriebenen Ebene (siehe Abbildung).



a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt.
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden.
Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche.

b) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mindestens $2{,}50\,m$ hoch sein.
Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.
Zur Installation von Lautsprechern wird eine $5{,}2\,m$ lange, senkrecht zum Erdboden verlaufende Stütze montiert. Ihre Enden werden an der Kante $\overline{BC}$ und am Dach der Tribüne fixiert. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kante $\overline{BC}$, in dem das untere Ende der Stütze fixiert wird.

Aufgabe B2.1

Die Punkte $A(0|-6|0)$, $B(6|0|0)$, $C(0|6|0)$ und $S(0|0|5)$ sind der Eckpunkte der Pyramide $ABCS$. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Kante AS und M_2 ist der Mittelpunkt der Kante CS. Die Ebene E verläuft durch M_1, M_2 und B.

a) Die Ebene E schneidet die Pyramide in einer Schnittfläche.
Stellen Sie Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Umfang der Schnittfläche.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

b) Der Punkt Q liegt auf der Kante BS und bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

c) Der Punkt Z liegt in der x_1x_3-Ebene und im Inneren der Pyramide $ABCS$.
Er hat von der Grundfläche ABC, der Seitenfläche ACS und von E den gleichen Abstand.
Berechnen Sie die Koordinaten von Z.

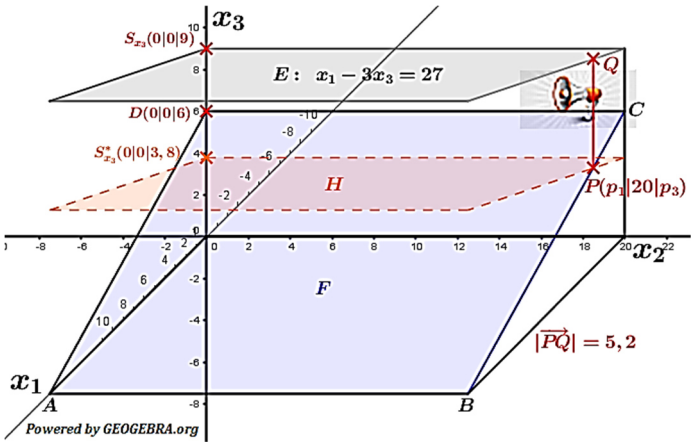
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene F:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Zusammen mit dem Punkt A ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Winkel zwischen Nutzfläche und Boden:
Berechnung über den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Der Normalenvektor von F ist bereits errechnet, der Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Achtung:** GTR-MODE muss auf *DEGREE* stehen.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*
Aufgrund der rechteckigen Nutzfläche sind die Koordinaten des Punktes $D(0|0|6)$.
Der Punkt S ist der Spurpunkt der Ebene E mit der x_3-Achse.
Der Abstand der Nutzfläche vom Dach entspricht der Strecke DS.



Koordinaten des Befestigungspunktes P:
Der Abstand des Punktes P und Q soll nach Aufgabenstellung $5{,}2\,m$ betragen. Wir bilden eine Hilfsebene H parallel zu E, die $5{,}2\,LE$ unterhalb von E liegt.
Der Schnittpunkt von H mit der Geraden g durch B und C ist dann der Verankerungspunkt P.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Nutzfläche F:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = 60 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$F\colon\ 2x_1 + 5x_3 = d$ | Punktprobe mit $A(15|0|0)$

$F\colon\ 2 \cdot 15 + 5 \cdot 0 = d \quad \Rightarrow \quad d = 30$

$F\colon\ 2x_1 + 5x_3 = 30$

Neigungswinkel von F gegen den Erdboden (x_1x_2-Ebene):

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|5|}{\sqrt{29}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = 21{,}8\,°$$

F schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $21{,}8\,°$.

Inhalt der Nutzfläche:

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{120^2 + 300^2} \approx 323{,}1$$

Die Nutzfläche hat einen Flächeninhalt von etwa $323\,m^2$.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Punkt $D(0|0|6)$

Spurpunkt von E mit der x_3-Achse ist $S_{x_3}(0|0|9)$

Abstand Nutzfläche / Dachfläche: $d = |\overrightarrow{DS_{x_3}}| = 3$

Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

Koordinaten des Befestigungspunktes P:

Gerade g durch B und C:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene H parallel E mit $5{,}2\,LE$ unterhalb von E:

Spurpunkt H mit der x_3-Achse $S^*_{x_3}(0|0|9-5{,}2)$

$H\colon\ x_1 - 3x_3 = d$ | Punktprobe mit $S^*_{x_3}(0|0|3{,}8)$

$-3 \cdot 3{,}8 = d \Rightarrow \ d = -11{,}4$

$H\colon\ x_1 - 3x_3 = -11{,}4$

$H \cap g$

$x_1 = 15 - 15r;\ \ x_2 = 20;\ \ x_3 = 6r$

$x_1; x_2; x_3 \longrightarrow H$

$15 - 15r - 3 \cdot 6r = -11{,}4$

$15 - 33r = -11{,}4$

$33r = 26{,}4 \Rightarrow \ r = 0{,}8$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}8 \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Verankerungspunktes sind $P(3|20|4{,}8)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B2.1

Lösungslogik

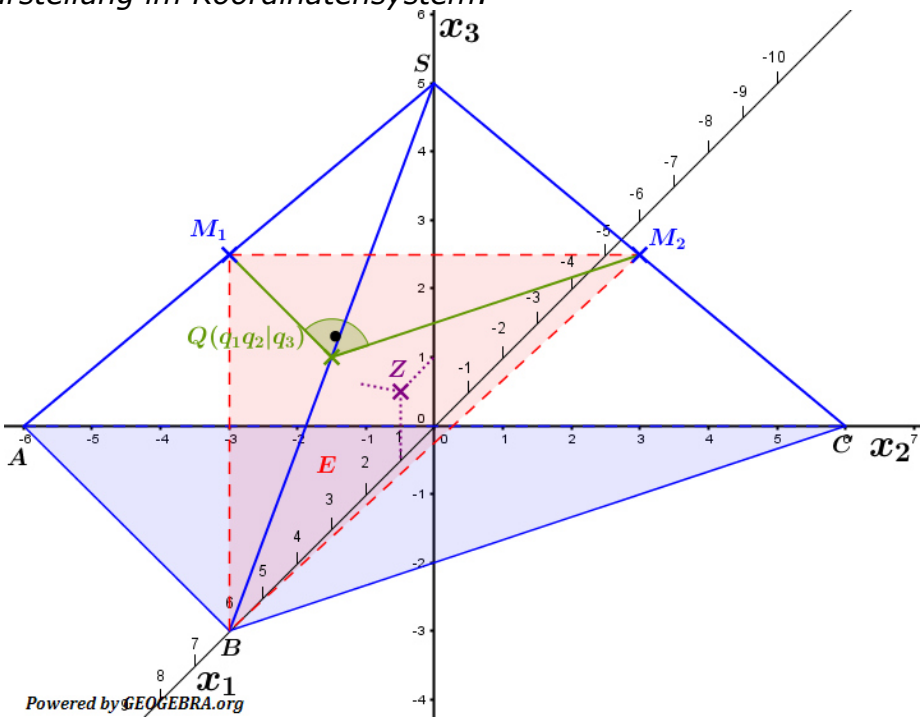
a) *Darstellung im Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb
Umfang der Schnittfläche:
Der Umfang der Schnittfläche ist die Summe der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1B}$ und $\overrightarrow{M_2B}$. Die Koordinaten von M_1 und M_2 müssen hierzu ermittelt werden.
Koordinatengleichung von E:
Bildung des Normalenvektors von E über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{M_1B}$ und anschließender Punktprobe mit $B(6|0|0)$ zur Errechnung von d.

b) *Koordinaten von Q:*
Der Punkt Q liegt auf der Geraden durch B und S. Die Geradengleichung g beschreibt die Koordinaten von Q.
Wegen der Rechtwinkligkeit muss das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{M_1Q}$ und $\overrightarrow{M_2Q}$ gleich Null sein. Hierüber ermitteln wir den Skalar r der Geradengleichung g. Es entsteht eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für r, wobei die Lösung $r > 1$ keine Lösung ist, da dann der Punkt Q oberhalb der Spitze der Pyramide zu liegen käme.

c) *Koordinaten von Z:*
Z liegt in der x_1x_3-Ebene, also ist die x_2-Koordinate gleich 0. Er hat von der Grundfläche ABC (gleich x_1x_2-Ebene) den Abstand $x_3 = a$. Laut Aufgabenstellung soll dieser Abstand gleich groß sein zur Seitenfläche ACS (gleich x_2x_3-Ebene), also $x_1 = a$. Somit gilt: $Z(a|0|a)$. Über die HNF der Ebene E ermitteln wir dann a.

Klausuraufschrieb

a) *Darstellung im Koordinatensystem:*



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Umfang der Schnittfläche:

$u = |\overrightarrow{M_1M_2}| + |\overrightarrow{M_1B}| + |\overrightarrow{M_2B}|$

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ -6+0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ 6+0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{M_1M_2}| = 6$

$|\overrightarrow{M_1B}| = \sqrt{(6-0)^2 + (0-(-3))^2 + (0-2.5)^2} = \sqrt{36+9+6{,}25} \approx 7{,}16$

$|\overrightarrow{M_2B}| = \sqrt{(6-0)^2 + (0-3)^2 + (0-2.5)^2} = \sqrt{36+9+6{,}25} \approx 7{,}16$

$u = 6 + 7{,}16 + 7{,}16 = 20{,}32$

Der Umfang der Schnittfläche beträgt $20{,}32\ LE$.

Koordinatengleichung von E*:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 5x_1 + 12x_3 = d$ | Punktprobe mit $B(6|0|0)$

$E\colon\ 5 \cdot 6 + 12 \cdot 0 = d \quad \Rightarrow \quad d = 30$

$E\colon\ 5x_1 + 12x_3 = 30$

b) *Koordinaten von* Q*:*

Gerade g durch B und S:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 6-6r \\ 0 \\ 5r \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{M_1Q} \circ \overrightarrow{M_2Q} = 0$ | Wegen des rechten Winkels

$$\begin{pmatrix} 6-6r \\ 3 \\ 5r-2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6-6r \\ -3 \\ 5r-2{,}5 \end{pmatrix} = 0$$

$(6-6r)^2 - 9 + (5r-2{,}5)^2 = 0$

$36 - 72r + 36r^2 - 9 + 25r^2 - 25r + 6{,}25 = 0$

$33{,}25 + 61r^2 - 97r = 0$

$r_1 \overset{GTR}{=} 0{,}5; \quad r_2 \overset{GTR}{\approx} 1{,}09$

$$\overrightarrow{OQ_1} = \begin{pmatrix} 6-6\cdot 0{,}5 \\ 0 \\ 5\cdot 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} 6-6\cdot 1{,}09 \\ 0 \\ 5\cdot 1{,}09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}54 \\ 0 \\ 5{,}45 \end{pmatrix}$$

Der Punkt Q_2 gehört nicht zu Lösung, da er oberhalb der Spitze der Pyramide zu liegen käme.

Q *hat die Koordinaten* $(3|0|2{,}5)$

c) *Koordinaten von* Z*:*

$Z(z_1|z_2|z_3)$.

Z liegt in der x_1x_3–Ebene, somit $z_2 = 0$.

Abstand von Z zur Seitenfläche ACS (gleich x_2x_3–Ebene) ist $x_1 = a$.

Abstand von Z zur Grundfläche ABC (gleich x_1x_2–Ebene) ist $x_3 = b$.

Wegen Aufgabenstellung ist $a = b$. Also hat Z die Koordinaten $(a|0|a)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Dieser Abstand a soll auch der Abstand zur Ebene E sein, Berechnung über die HNF.

$\frac{5x_1+12x_3-30}{\sqrt{25+144}} = 0$ | Punkt Z einsetzen

$\frac{|5a+12a-30|}{\sqrt{169}} = a$

$|5a + 12a - 30| = 13a$

$|17a - 30| = 13a$

$4a - 30 = 0$

$a_1 = 7{,}5$

$30a - 30 = 0$

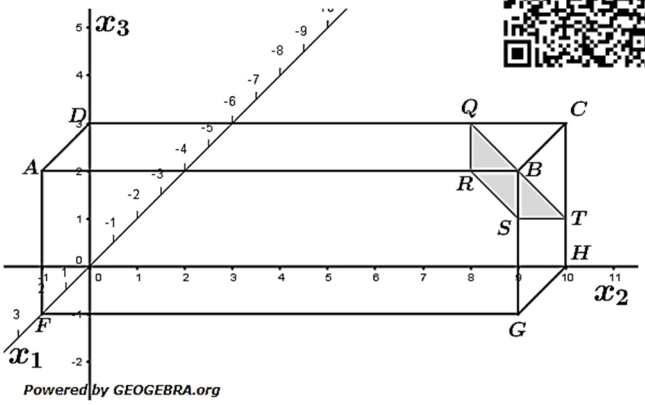
$a_2 = 1$

$Z_1(7{,}5|0|7{,}5)$; $Z_2(1|0|1)$

Da Z_1 außerhalb der Pyramide liegt ist Z_2 der gesuchte Punkt.

Aufgabe B1

Ein Künstler teilt einen quaderförmigen Container durch einen ebenen Schnitt in einen großen und kleinen Teilkörper. Der Container wird in einem Koordinatensystem als Quader mit den Eckpunkten $A(2|0|3)$, $B(2|10|3)$, $C(0|10|3)$, D, F, $G(2|10|0)$, H, und $O(0|0|0)$ dargestellt.
(Koordinatenangaben in Meter).
Die Ebene E schneidet die Kanten des Quaders in den Punkten $R(2|9|3)$, $S(2|10|2)$, $T(0|10|1)$ und $Q(0|8|3)$.



Die Eckpunkte der Dachfläche liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche.
Der kleine Teilkörper hat also die Eckpunkte Q, R, S, T, B, C.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck $QRST$ um ein Trapez handelt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $QRST$.
(Teilergebnis: $E\colon -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$)

b) Der kleine Körper wird mit den Schnittkanten nach unten auf den großen Teilkörper gestellt.
Bestimmen Sie die Höhe des zusammengesetzten Körpers.

c) Der Container besitzt eine Tür, die im geschlossenen Zustand durch das Viereck $ODAF$ dargestellt wird. Die Tür ist drehbar um die Kante, die durch die Strecke $\overline{OD}$ beschrieben wird.
Jede Ebene $T_a\colon\ ax_1 + x_2 = 0;\ \ a \geq 0$ beschreibt eine mögliche Stellung dieser Tür.
Bestimmen Sie den Wert für a, für den der Öffnungswinkel der Tür $30°$ beträgt.

Aufgabe B2

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit über dem offenen Meer. In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene die Meeresoberfläche. Die Beobachtung der Flugzeuge beginnt im $14{:}00$ Uhr. Die Flugbahn von F_1 wird beschrieben durch die Gleichung

$$g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \text{ (t in Minuten nach Beobachtungsbeginn).}$$

Der Punkt $P(-17|54|3{,}2)$ beschreibt die Position von F_2 um $14{:}00$ Uhr, der Punkt $Q(1|36|3{,}8)$ die Position von F_2 um $14{:}03$ Uhr (1 LE entspricht $1\ km$).

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von F_1 in km/min.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem F_1 eine Höhe von $4{,}9\ km$ erreicht.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, mit dem das Flugzeug F_2 steigt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Die Flugbahnen F_1 und F_2 schneiden sich.
Aus Sicherheitsgründen müssen die Zeitpunkte, zu denen die Flugzeuge den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen durchfliegen, mindestens einer Minute auseinander liegen.
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

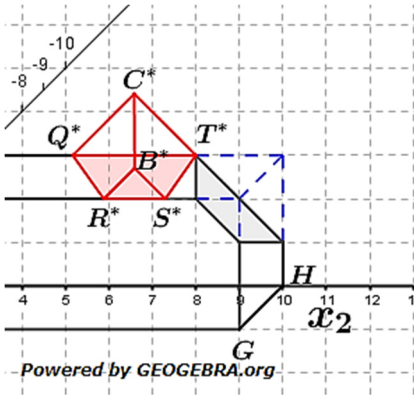
c) Die Position eines Ballons wird durch den Punkt $B(6|43|4{,}3)$ beschrieben.
Bestimmen Sie einen Zeitpunkt t_0, zu dem beide Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben.
Die Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt t_0 ebenfalls von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind, liegen auf einer Geraden.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung dieser Geraden bestimmen kann.

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{RS}$ und $\overrightarrow{RT}$. Zusammen mit dem Punkt R ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Viereck $QRST$ ist ein Trapez:
Das Viereck ist ein Trapez wenn gilt: $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{QT} \wedge |\overrightarrow{RS}| \neq |\overrightarrow{QT}|$. Weiteres ist nicht nachzuweisen.
Flächeninhalt des Trapezes $QRST$:
Wir bestimmen den Abstand $d(S; g_{QT})$ des Punktes S von der Geraden durch Q und T. Dies ist die Höhe des Trapezes, sodass der Flächeninhalt sich errechnet aus $A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{RS}|+|\overrightarrow{QT}|}{2} \cdot d(S; g_{QT})$.

b) *Höhe des zusammengesetzten Körpers:*
Aus der nebenstehenden Teilgrafik ergibt sich, dass wir zunächst den Abstand des Punktes C von der Ebene E ermitteln müssen, denn C ist der Punkt mit dem größten Abstand zu E.
Aus der Höhe des Containers zuzüglich dem Abstand wie angeführt errechnet sich dann die Höhe des zusammengesetzten Körpers.
Abstandsberechnung über die HNF.



c) *α für T_α, dass Öffnungswinkel der Tür $= 30°$ ist.*
Das Viereck $ADOF$ (Tür geschlossen) ist die x_1x_3-Ebene selbst mit F: $x_2 = 0$. Wird die Tür geöffnet, so errechnet sich der Schnittwinkel über die Formel für Schnittwinkel von Ebene/Ebene mit $cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$. Mit $cos(30°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ lässt sich dann α ermitteln.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$ | Punktprobe mit $R(2|9|3)$
E: $-2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = d \quad \Rightarrow \quad d = 22$
E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2017 BW

Viereck $QRST$ ist ein Trapez:

$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad |\overrightarrow{RS}| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad |\overrightarrow{QT}| = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$

$-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RS}$

Wegen $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{QT} \wedge |\overrightarrow{RS}| \neq |\overrightarrow{QT}|$ ist das Viereck $QRST$ ein Trapez.

Flächeninhalt des Trapezes $QRST$:

Abstand des Punkts von der Geraden durch und :

$d(S; g_{QT}) = \frac{|\overrightarrow{QT} \times \overrightarrow{TS}|}{|\overrightarrow{QT}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{RS}| + |\overrightarrow{QT}|}{2} \cdot d(S; g_{QT}) = \frac{\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 4{,}5.$

Das Trapez hat eine Fläche von $4{,}5\ m^2$.

b) *Höhe des zusammengesetzten Körpers:*

Höhe des Containers: $3\ m$.

Abstand von Punkt C zur Ebene E über die HNF:

$d(C; E) = \frac{-0 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 3 - 22}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{4}{3}$

$h_{Cont} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$

Die Höhe des zusammengesetzten Körpers beträgt $\frac{4}{3}\ m$.

c) a für T_a, *dass Öffnungswinkel der Tür $= 30\,°$ ist.*

Geschlossene Tür $ADOF$ liegt in der x_1x_3-Ebene mit dem Normalenvektor

$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n_T} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Öffnungswinkel über $cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_T} \circ \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_T}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$ mit $cos(30\,°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{a^2+1} \cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sqrt{a^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad | \quad \uparrow\ ^2$

$a^2 + 1 = \frac{4}{3} \Longrightarrow \ a^2 = \frac{1}{3}$

$a = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Untersuchung, welches a gilt:

T: $\frac{1}{3}\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$

x_2-Koordinate für $x_1 = 1$:

$\frac{1}{3}\sqrt{3} + x_2 = 0 \Longrightarrow \ x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Somit gilt $a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, wie auch aus der Aufgabenstellung hervorgeht.

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Geschwindigkeit F_1:*

Wegen *Geschwindigkeit F_1:* in Minuten ist dies $\left|\begin{pmatrix}-4\\12\\0{,}3\end{pmatrix}\right|$ (Richtungsvektor der Geraden g_1.

Zeitpunkt, zu dem F_1 die Höhe $4{,}9\ km$ erreicht:

Die x_3-Koordinate der Geradengleichung g_1 ist maßgebend für die Höhe des Flugzeuges. Es muss also gelten: $x_3 = 4{,}9 = 3{,}4 + t \cdot 0{,}3$.

Steigwinkel von F_2:

Dies ist der Winkel, unter dem der Richtungsvektor von g_2 die x_1x_2-Ebene schneidet.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Zunächst Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Fluggeraden g_1 und g_2. Danach Umrechnung des Richtungsvektors von F_2 auf gleiche Geschwindigkeit wie F_1.

Berechnung der Zeit von F_1 für die Strecke zwischen Aufpunkt und Schnittpunkt. Gleiches für F_2.

c) *Abstand von F_1 und F_2 zum Ballon:*

Auch hier muss mit gleichen Geschwindigkeiten beider Flugzeuge gerechnet werden.

Es handelt sich um eine Abstandsberechnung von Punkt zu Punkt. Sei F der Aufpunkt von F_1 und G der Aufpunkt von F_2, dann muss gelten $|\overrightarrow{FB}| = |\overrightarrow{GB}|$.

Klausuraufschrieb

a) *Geschwindigkeit F_1:*

$$v_{F_1} = \left|\begin{pmatrix}-4\\12\\0{,}3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16 + 144 + 0{,}09} = \sqrt{160{,}09} = 12{,}65$$

F_1 hat eine Geschwindigkeit von etwa $12{,}65\ km/min$.

Zeitpunkt, zu dem F_1 die Höhe $4{,}9\ km$ erreicht:

$x_3 = 4{,}9 = 3{,}4 + t \cdot 0{,}3 \implies t = 5$

5 *Minuten nach Beobachtungsbeginn erreicht F_1 die Höhe $4{,}9\ km$.*

Steigwinkel φ von F_2:

Fluggerade von F_2:

$$g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-17\\54\\3{,}2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}18\\-18\\0{,}6\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R};\ s \text{ in 3 Minuten}$$

Wegen s in 3 Minuten gilt auch für F_2:

$$g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-17\\54\\3{,}2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\-6\\0{,}2\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R};\ t \text{ in Minuten.}$$

Damit sind F_1 und F_2 vergleichbar.

$$sin(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix}6\\-6\\0{,}2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}6\\-6\\0{,}2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0{,}2}{\sqrt{72{,}04}}$$

$$\varphi = arcsin\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{72{,}04}}\right) = 1{,}35\,°$$

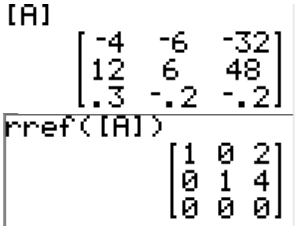
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*
Ermittlung des Schnittpunktes der beiden Fluggeraden.

$g_1 \cap g_2$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix}$$

$-4t - 6s = -32$
$12t + 6s = 48$
$0{,}3t - 0{,}2s = -0{,}2$
$t = 2; \quad s = 4$



F_1 erreicht den Schnittpunkt nach 2 Minuten, F_2 nach 4 Minuten, der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

c) *Abstand von F_1 und F_2 zum Ballon:*
Sei F der Aufpunkt von F_1 und G der Aufpunkt von F_2 so muss gelten:

$|\overrightarrow{FB}| = |\overrightarrow{GB}|$

$|\overrightarrow{FB}| = \sqrt{(15 - 4t - 6)^2 + (6 + 12t - 43)^2 + (3{,}4 + 0{,}3t - 4{,}3)^2}$

$|\overrightarrow{GB}| = \sqrt{(-17 + 6t - 6)^2 + (54 - 6t - 43)^2 + (3{,}2 + 0{,}2t - 4{,}3)^2}$

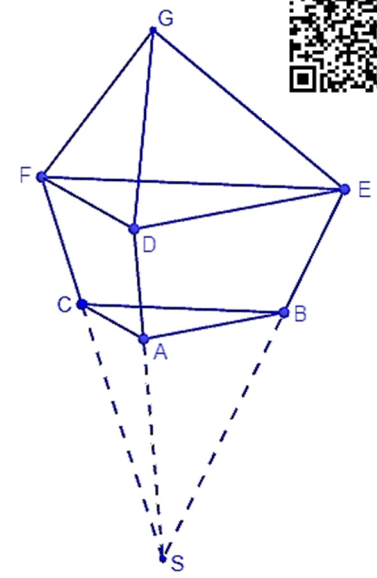
$t_1 \overset{\text{GTR}}{\approx} 2{,}27; \quad t_2 \overset{\text{GTR}}{=} 4{,}0$

Es gibt zwei Zeitpunkte, zu denen die beiden Flugzeuge gleich weit vom Ballon entfernt sind. (Eine Lösung hätte nach Aufgabenstellung ausgereicht).

Verfahren zur Bestimmung der Punkte auf der Meeresoberfläche mit gleich weiter Entfernung zu den beiden Flugzeugen:
Man bestimmt die Position der Flugzeuge P_1 bzw. P_2 z. B. zum Zeitpunkt t_2.
Die Ebene durch den Punkt B (Position des Ballons) mit dem Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Normalenvektor, also $E\colon \left(\vec{x} - \overrightarrow{OB}\right) \circ \overrightarrow{P_1P_2} = 0$, enthält alle Punkte, die von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der x_1x_2-Ebene enthält dann alle Punkte auf der Meeresoberfläche, die von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind.

Aufgabe B1

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die Horizontale. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene. In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-58|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$ und $G(-10|10|35)$.
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht $1\,m$ in der Realität.



Powered by GEOGEBRA.org 3D

a) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.
Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\15\end{pmatrix} <=> \quad r=s=3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\15\\-30\end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad S(-15|15|-30)$$

Erläutern Sie die Schritte des dargestellten Vorgehens.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Bodenfläche der oberen Etage.
Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für jeweils $100\,m^3$ Rauminhalt eine elektrische Leistung von $0{,}8$ Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass zur Entfeuchtung der Luft eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

c) An einer Metallstange, deren Enden durch die Punkte G und $R(-5|5|15)$ dargestellt werden, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt.
Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von $8\,m$ diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B2

Gegeben sind die Ebenen E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ und F: $2x_1 + x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass E nicht orthogonal zu F ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

Die Ebenen E und F gehören zur Ebenenschar E_a: $ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4;\ a \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie an, für welche Werte von a die zugehörige Ebene E_a alle drei Koordinatenachsen schneidet.
Für diese Werte von a bilden die Spurpunkte von E_a zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen $6\,VE$ beträgt.

c) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist.
Begründen Sie, dass die Schar keine zueinander parallelen Ebenen enthält.

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Obere Bodenfläche nicht rechtwinklig:*
Keines der Skalarprodukte von $\overrightarrow{FD}$ und $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FD}$ und $\overrightarrow{FE}$ als auch $\overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{DE}$ darf Null sein.
Bedeutung der dargestellten Berechnung:
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Bodenfläche der oberen Etage:*
Die Bodenfläche der oberen Etage wird durch das Dreieck DEFgebildet. Zur Berechnung dessen Fläche bilden wir $A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right|$.
Dimensionierung der Luftentfeuchtungsanlage:
Nachdem wir zuvor ja die Grundfläche ermittelt haben, berechnet sich das Volumen der oberen Dreieckspyramide aus $V_{DEFG} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right) \circ \overrightarrow{FG}\right|$. Ist das Volumen nicht größer als $25 : 0{,}8\, m^3$, ist die Leistung der Anlage mit Kilowatt ausreichend.

c) *Koordinaten des Befestigungspunktes eines Scheinwerfers.*
Die zu beleuchtende Wand wird durch das Dreieck EFG dargestellt, wir stellen die Koordinatengleichung einer Ebene E auf, in der Das Dreieck EFG liegt.
Die Befestigungsstange für den Scheinwerfer wird durch die Gerade durch die Punkte G und $R(-5|5|15)$ dargestellt. Auf der Geraden liegt der Befestigungspunkt $B(b_1|b_2|b_3)$. Der Abstand dieses Punktes B zur Ebene E soll $8\, m$ betragen. Wir berechnen den Abstand B zur Ebene E über die HNF.

Klausuraufschrieb

a) *Obere Bodenfläche nicht rechtwinklig:*

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = -150$$

$$\overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = 625 - 125 = 550$$

$$\overrightarrow{FE} \circ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 750$$

Keines der drei Skalarprodukte ist gleich Null, das Dreieck DEF ist nicht rechtwinklig.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2018 BW

Bedeutung der dargestellten Berechnung:
Eine Gerade g durch die Punkte D und A wird mit einer Geraden h durch die Punkte E und B geschnitten. Das daraus resultierende lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit $r = s = 3$.
Durch den Einsatz des Skalierungsfaktors $r = 3$ in die Geradengleichung g errechnen sich die Koordinaten der Spitze S der dargestellten Doppelpyramide.

b) $A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -750 \end{pmatrix}\right| = 375$

Die Bodenfläche der oberen Etage hat eine Fläche von $375\,m^2$.

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$

$V_{DEFG} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{DE}\right) \circ \overrightarrow{FG}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -750 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-15000| = 25000$

Das Volumen der oberen Etage beträgt $25000\,m^3$.
$25000 : 100 \cdot 0{,}8 = 20 < 25$
Die Leistung der Entfeuchtungsanlage ist ausreichend dimensioniert.

c) *Koordinaten des Befestigungspunktes eines Scheinwerfers.*
Koordinatengleichung einer Ebene E in der die Wand EFG liegt:

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{FE} \times \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -500 \\ -250 \end{pmatrix} = 250 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{EFG}\colon\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = d$
$2 \cdot 0 - 2 \cdot 30 - 15 = d$
$d = -75$
$E_{EFG}\colon\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -75$

Gerade g durch G und $R(-5|5|15)$

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$

Der Befestigungspunkt B des Scheinwerfers hat somit die Koordinaten $B(-10 + 5r|10 - 5r|35 - 20r)$.
Abstand von B zu E_{EFG} ist $8\,m$:

$\frac{|2x_1 - 2x_2 - x_3 + 75|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 8$ | HNF

$\frac{|2 \cdot (-10 + 5r) - 2 \cdot (10 - 5r) - (35 - 20r) + 75|}{3} = 8$

$|-20 + 10r - 20 + 10r - 35 + 20r + 75| = 24$
$|40r| = 24$
$40r_1 = 24 \;\; => \;\; r_1 = 0{,}6$
$40r_2 = -24 \;\; => \;\; r_2 = -0{,}6$

Da der Richtungsvektor der Vektor $\overrightarrow{GR}$ ist, kommt die Lösung nicht in Frage.
$B(-10 + 5 \cdot 0{,}6|10 - 5 \cdot 0{,}6|35 - 20 \cdot 0{,}6) = B(-7|7|23)$
Der Scheinwerfer wird auf Position $B(-7|7|23)$ montiert.

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Wir berechnen die Spurpunkte der Ebene E und zeichnen dieselbe in ein Koordinatensystem.
Orthogonalität von E und F:
Wir bilden das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_F}$.
Schnittgerade s:
Wir schneiden E und F und ermitteln aus dem Gleichungssystem die Geradengleichung von s.

b) *Wert von a für Schnitt aller Koordinatenachsen:*
Die Ebenengleichung muss alle drei Komponenten , und beinhalten.
Dreieckspyramide mit Volumen $6\,VE$:
Der Ursprung und die beiden Spurpunkte S_{x_1} und S_{x_2} stellen die Grundfläche der Pyramide als rechtwinkliges Dreieck dar, die Pyramidenspitze liegt Spurpunkt S_{x_3}. Wir bestimmen a über die Volumenformel einer Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

c) *Wert für a, sodass Abstand zu $P(0|0|1)$ maximal wird:*
Wir berechnen den Abstand von E_a zu P über die HNF.
Begründung Schar enthält keine parallelen Ebenen:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

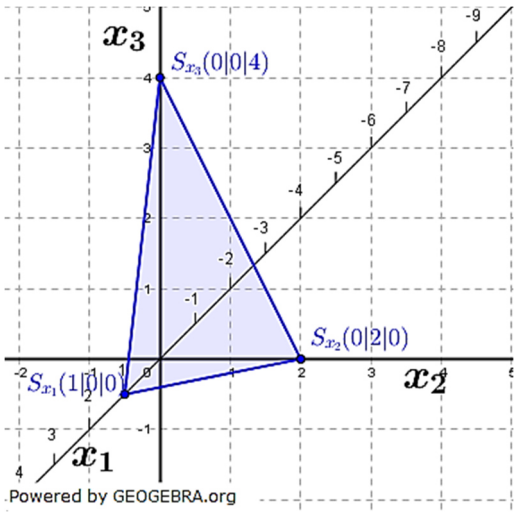
a) *Darstellung in Koordinatensystem:*

$E\colon\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \qquad | \quad :4$

$E\colon\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} = 1 \qquad |$ Achsenabschnittsform

$S_{x_1}(1|0|0); \quad S_{x_2}(0|2|0); \quad S_{x_3}(0|0|4)$

Darstellung siehe Graphik rechts.



Orthogonalität von E und F:

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 0 + 1 = 9 \neq 0$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} \neq 0$ sind E und F nicht orthogonal.

Schnittgerade s:

$E \cap F$

(1) $\quad 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

(2) $\quad 2x_1 \qquad\quad + x_3 = 4$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2018 BW

Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir wählen eine Unbekannte frei:

$x_3 = t$

(2) $\quad 2x_1 \qquad + t = 4$

$\quad x_1 = 2 - \frac{1}{2}t$

$x_1; x_3 \rightarrow \quad (1)$

(1) $\quad 4 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}t\right) + 2x_2 + t = 4$

$\quad 8 - 2t + 2x_2 + t = 4$

$\quad 8 - t + 2x_2 = 4 \qquad | \quad -8;\ +t$

$\quad 2x_2 = -4 + t \qquad | \quad :2$

$\quad x_2 = -2 + \frac{1}{2}t$

Lösungsvektor:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t \\ -2 + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$s: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) *Wert von a für Schnitt aller Koordinatenachsen:*

Damit die Ebene alle drei Koordinatenachsen schneidet, darf sie zu keiner Koordinatenachse parallel sein.

Eine Ebene ist parallel zu einer Koordinatenachse, wenn mindestens eine Koordinate des Normalenvektors Null ergibt. Dies ist der Fall für $a = 0$ oder $a = 2$. Somit gilt: $a \in \mathbb{R} \backslash \{0; 2\}$ der Fall.

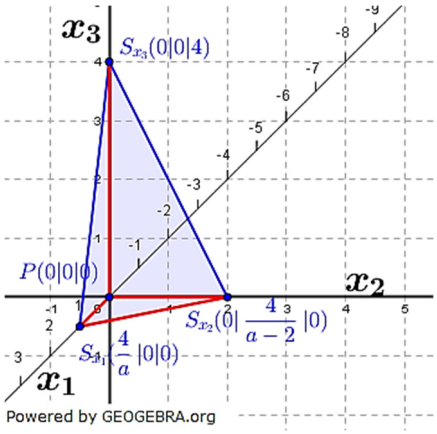
Dreieckspyramide mit Volumen $6\,VE$:

$ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4 \qquad | \quad :4$

$\frac{x_1}{\frac{4}{a}} + \frac{x_2}{\frac{4}{a-2}} + \frac{x_3}{4} = 1$

$S_{x_1}\left(\frac{4}{a}|0|0\right); \quad S_{x_2}\left(0\left|\frac{4}{a-2}\right|0\right); \quad S_{x_3}(0|0|4)$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Die Grundfläche ist das rechtwinklige Dreieck $PS_{x_1}S_{x_2}$, die Höhe ist die Strecke $\overline{PS_{x_3}} = 4$.

$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a-2} = \frac{8}{a(a-2)}$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{a(a-2)} \cdot 4 = \frac{32}{3a(a-2)}$

V_{Pyr} soll nach Aufgabenstellung $6\,VE$ groß sein.

$\frac{32}{3a(a-2)} = 6 \qquad | \quad \cdot 3a(a-2)$

$32 = 18 \cdot a(a-2) \qquad | \quad :18$

$\frac{16}{9} = a^2 - 2a \qquad | \quad -\frac{16}{9}$

$a^2 - 2a - \frac{16}{9} = 0$

$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = 1 \pm \frac{5}{3}$

$a_1 = \frac{8}{3}; \quad a_2 = -\frac{2}{3}$

c) *Wert für a, sodass Abstand zu $P(0|0|1)$ maximal wird:*

$\frac{|ax_1+(a-2)x_2+x_3-4|}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}} = 0$ | HNF

$\frac{|1-4|}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}} = d(a)$

$d(a) = \frac{|-3|}{\sqrt{2a^2-4a+5}}$

$d^2(a) = \frac{9}{2a^2-4a+5}$

$d^{2\prime}(a) = \frac{-9(4a-4)}{(2a^2-4a+5)^2}$

Maximum über $d^{2\prime}(a) = 0$

$-36a + 36 = 0$

$a = 1$

$d(1) = \frac{|-3|}{\sqrt{2\cdot 1^2-4\cdot 1+5}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2-4+5}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Die Ebene E_1 hat mit $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,LE$ den größten Abstand zum Punkt $P(0|0|1)$.

Begründung Schar enthält keine parallelen Ebenen:

Die Normalenvektoren paralleler müssen ein Vielfaches voneinander sein. E_a hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{E_a}} = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eine parallele Ebene E_b hätte den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{E_b}} = \begin{pmatrix} b \\ b-2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b \neq a$.

Nun müsste gelten: $\begin{pmatrix} b \\ b-2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus der x_3-Koordinate ergibt sich ein $k = 1$. Somit müsste die x_1-Koordinate $b = 1 \cdot a$ sein, was durch die Aufgabenstellung jedoch ausgeschlossen ist.

Die Ebenenschar hat keine parallelen Ebenen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de