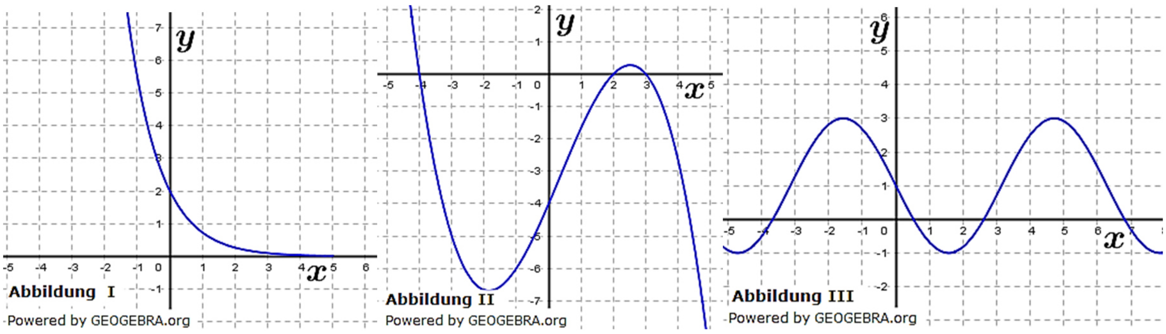
Abituraufgaben Basisfach Analysis – Vortrag - Musteraufgabe 01

Lösung M01

Lösungsvorbereitung:



a) Wir sollen den Abbildungen 1 bis 3 Graphen einer ganzrationalen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g sowie einer Exponentialfunktion h zuordnen.
Abbildung 2 gehört zum Graphen f. Der Graph hat einen Tiefpunkt, einen Hochpunkt, einen Wendepunkt sowie drei Nullstellen bei $x_1 = -4,\ x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Er verläuft aus dem zweiten Quadranten in den vierten Quadranten.
Abbildung 3 gehört zum Graphen g, der trigonometrischen Funktion mit gleichbleibendem Ausschlag nach unten und oben und periodisch wiederkehrenden Funktionswerten.
Abbildung 1 gehört somit zum Graphen von h, einer Exponentialfunktion. Der Graph hat die x-Achse als waagrechte Asymptote für x nach $+\infty$. Er verläuft für x nach $-\infty$ nach $+\infty$.

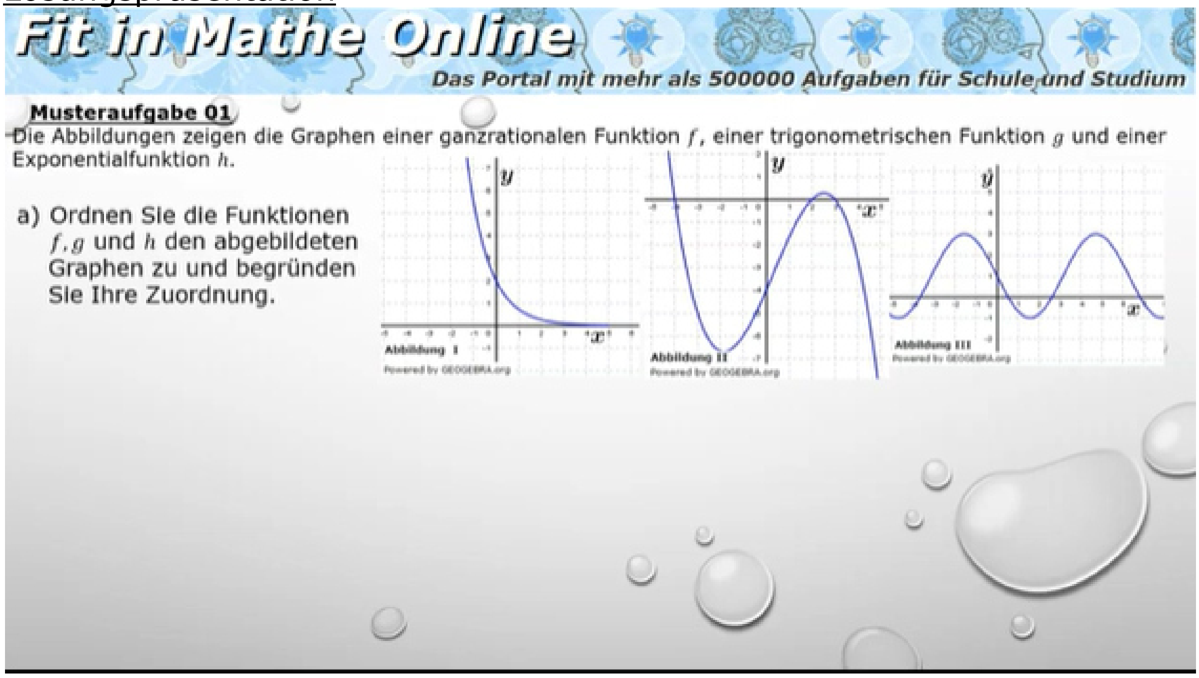
b) Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit drei gegebenen Nullstellen. Mithilfe der Nullstellengleichung ergibt sich zunächst
$f(x) = a \cdot (x+4) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.
Die Punktprobe mit $f(0) = -4$ führt zu
$-4 = a \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 24a$.
Daraus folgt: $a = -\frac{1}{6}$.
$f(x) = -\frac{1}{6}(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.
Funktion g ist eine trigonometrische Funktion mit einer Periode von $p = 2\pi$, einer Amplitude von $a = 2$ und einer Verschiebung in y-Richtung um $d = 1$. Wegen der negativen Steigung bei $x_0 = 0$ ist es eine an der x-Achse gespiegelte Sinuskurve.
$g(x) = -2 \cdot sin(x) + 1$
Funktion f ist eine Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion e^x wurde an der y-Achse gespiegelt, was zu e^{-x} führt und dann in y-Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt. Ihre Gleichung lautet
$h(x) = 2 \cdot e^{-x}$.

c) Die Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt erstreckt sich zwischen den Nullstellen $x_1 = -4;\ x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Da nach dem Flächeninhalt gefragt ist, ein Teil der Fläche unterhalb und ein Teil oberhalb der x-Achse sich befindet, muss das Integral aufgeteilt werden. Und zwar in
$A = \left|\int_{-4}^{2} f(x)\,dx\right| + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$.

Abituraufgaben Basisfach Analysis – Vortrag - Musteraufgabe 01

d) Wir sollen zunächst den Wert einer Integralgrenze bestimmen.
Für welches a ist der Wert des Integrals von a bis 0 der Funktion $-e^{-x}$ gleich -2.
Wir bilden die Stammfunktion, setzen die obere Grenze 0 ein und subtrahieren die untere Grenze a.
$\int_a^0 -e^{-x}\,dx = [e^{-x}]_a^0 = 1 - e^{-a}$.
Der Ergebnisterm soll den Wert -2 annehmen.
$1 - e^{-a} = -2$
$-e^{-a} = -3$
$-a = ln\,(3)$
$a = -ln\,(3)$
Des Weiteren soll eine nicht konstante ganzrationale Funktion j bestimmt werden, deren Integral in den Grenzen von b bis c den Wert -8 haben soll.
Als nichtkonstante, ganzrationale Funktion wählen wir z. B. eine Ursprungsgerade mit der Form $j(x) = -x$ (ganzrationale Funktion 1. Grades).
Der Teil des unterhalb der x-Achse verlaufenden Graphen beginnt bei $x_0 = 0$.
Damit können wir wählen:
$b = 0; \quad c = c$
$\int_0^c -x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = -\frac{1}{2}c^2$
$\frac{1}{2}c^2 = 8$
$c^2 = 16$
$c_{1,2} = \pm 4$
Wegen $\int_0^c$ ist $+4$ Lösung der Aufgabe.
Allerdings wird das Integral auch negativ, wenn die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist, somit ist auch -4 Lösung der Aufgabe.

Lösungspräsentation



https://www.youtube.com/watch?v=xmOcO1URszE&ab_channel=Fit-in-Mathe-Online