Musteraufgabe M03

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$.

a) Abbildung 1 zeigt den Graphen von f.
Erläutern Sie, wie man den Graphen von f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = sin\,(x)$ erhält.

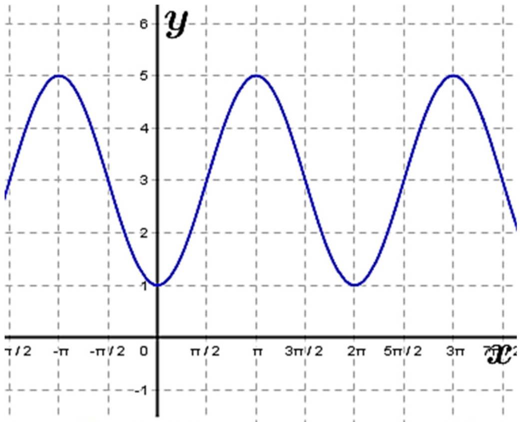

Abb. 1

b) Eine der Abbildungen 2 und 3 zeigt den Graphen von f'.
Entscheiden Sie, in welcher der Abbildungen der Graph von f' dargestellt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0$ gilt.

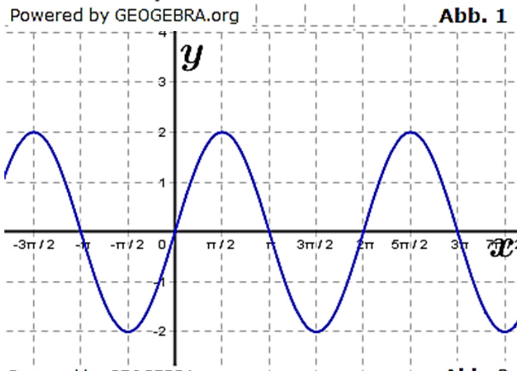

Abb. 2

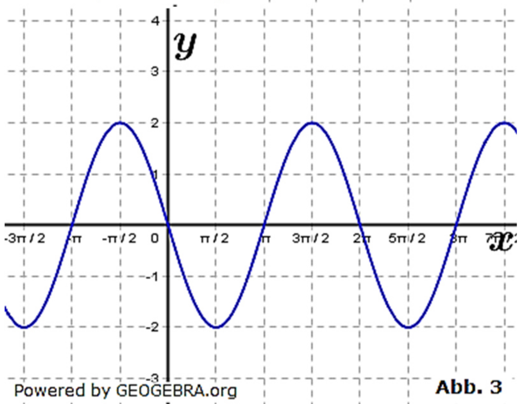

Abb. 3

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{0}^{\pi} 5 - f(x)\,dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.

Lösung M03

Lösungsvorbereitung:

a) Der Graph der Funktion f geht aus dem Graphen der Funktion g hervor durch:
   1. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2;
   2. Verschiebung in y-Richtung um drei Einheiten nach oben;
   3. Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ Einheiten nach rechts.

b) Abbildung 2 zeigt den Graphen von f'.
f hat z.B. eine Hochpunkt bei $x = \pi$. Ein Hochpunkt führt in der 1. Ableitung zu einer Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„. Nur Abbildung 2 hat eine solche Nullstelle.

$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0$ da $f(\pi) = 5$ und $f(-\pi) = 5$ und damit $f(\pi) - f(-\pi) = 0$.

c) $$\int_0^\pi 5 - \left(2 \cdot sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\right) dx = \int_0^\pi 2 - 2 \cdot sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^\pi 1 - sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2 \cdot \left[x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^\pi = 2 \cdot \left(\pi - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$
$$= 2(\pi - 0 + 0) = 2\pi$$

Interpretation:
Die Fläche, die von der Geraden $y = 5$ und der Funktion f im Intervall $I = [0; \pi]$ eingeschlossen ist, beträgt $2\pi\ FE$.

d) Die Aussage ist falsch.
Wegen der Angabe eines „beliebigen" Hochpunktes und „beliebigen" Tiefpunktes kann die Periode der Funktion nicht eindeutig bestimmt werden. Eine eindeutige Bestimmung wäre nur möglich, wenn es hieße „Eines beliebigen Hochpunktes und des unmittelbar davor oder dahinter liegenden Tiefpunktes".

Lösungspräsentation

Siehe Video unter
https://www.youtube.com/watch?v=rN5dqz8bVMo&feature=emb_logo&ab_channel=Fit-in-Mathe-Online