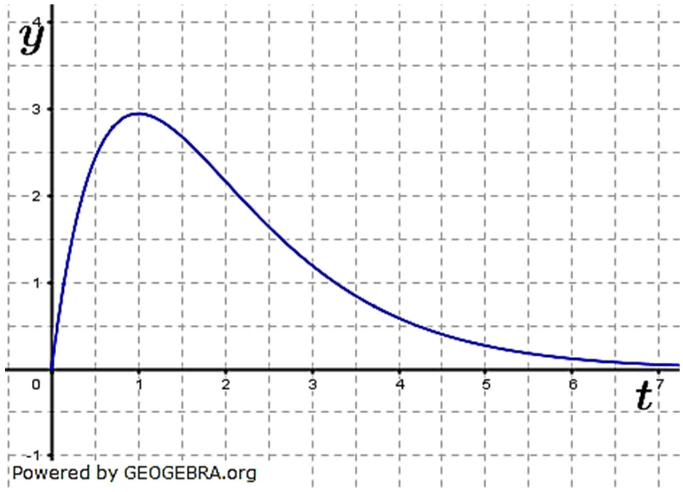
Musteraufgabe M05

Die Funktion f beschreibt für $t > 0$ die Wachstumsrate einer Pflanze. Die Zeit t wird dabei in Tagen und die Wachstumsrate $f(t)$ in cm pro Tag angegeben. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f.



a) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f'(2)$ und $\int_0^2 f(t)\,dt$.

b) Bestimmen Sie die ungefähre Höhe der Pflanze nach dem zweiten Tag, wenn die Pflanze zu Beobachtungsbeginn $20\,cm$ hoch war.

c) Die Funktion f hat den Funktionsterm $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$.
Für die Ableitung f' von f gilt: $f'(t) = e^{-t} \cdot (8 - 8t)$.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate der Pflanze am stärksten abnimmt.

d) F ist eine Stammfunktion von f. Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $F(t+1) = F(t) + 2{,}5$ führt.
Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung eine Lösung dieser Gleichung ermitteln kann.

Lösung M05

Lösungsvorbereitung:

a) $f'(2)$:
Legt man eine Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$, so lässt sich eine Steigung an dieser Stelle von etwa -1 ablesen.
$f'(2) \approx -1$
$\int_0^2 f(t)\,dt$
Wir zählen die Anzahl der Kästchen zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $I = [0; 2]$. Es sind etwa 19 Kästchen. Jedes Kästchen hat den Flächeninhalt $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse.
$\int_0^2 f(t)\,dt \approx \frac{19}{4}$.

b) Wir addieren zum Ergebnis von Teilaufgabe a) die Anfangshöhe der Pflanze.
$h = 20 + \frac{19}{4} = 24{,}75$.
Die Pflanze ist nach dem 2. Beobachtungstag etwa $24{,}75\ cm$ groß.

c) Stärkste Zu- bzw. Abnahmen von Änderungsraten finden in den Wendepunkten statt. Die erste Ableitung ist gegeben, wir bilden die zweite Ableitung:
$f''(t) = -e^{-t} \cdot (8 - 8t) - 8 \cdot e^{-t} = e^{-t}(-8 + 8t - 8)$
$= e^{-t} \cdot (8t - 16)$.
Für Wendepunkte zweite Ableitung auf null setzen:
$e^{-t} \cdot (8t - 16) = 0$ | Satz vom Nullprodukt.
$8t - 16 = 0 \Rightarrow t = 2$
Wir prüfen die Steigung für $t = 2$:
$f'(2) = e^{-2} \cdot (8 - 16) < 0$
Etwa 2 Tage nach Beobachtungsbeginn nimmt die Wachstumsrate der Pflanze am stärksten ab.

d) $F(t + 1) = F(t) + 2{,}5$
Innerhalb welchem 1-Tageszeitraum wächst die Pflanze um $2{,}5\ cm$?
Gesucht ist das Intervall $I = [t; t + 1]$ welches zu $\int_t^{t+1} f(t)dt = 2{,}5$ führt.
Dies ist in der Grafik ein senkrechter Streifen der Breite 1, der aus der Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $2{,}5$ ausschneidet. Die Lage des linken Randes des Streifens ist dann eine Lösung der Gleichung.

Lösungspräsentation
Siehe Video unter
https://www.fit-in-mathe-online.de/abituraufgaben-allgemeinbildendes-gymnasium/basisfach-analysis/musteraufgabe-m05#loesungspraesentation