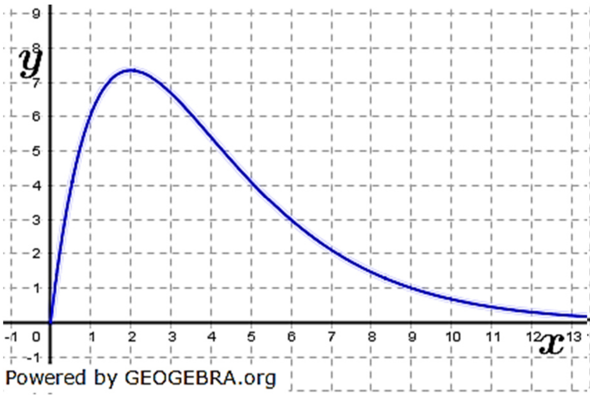
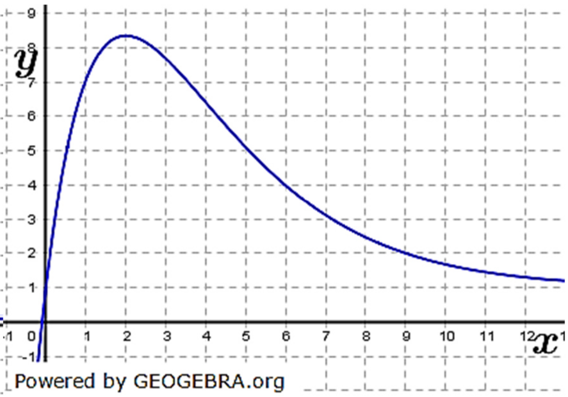
Musteraufgabe M11

Die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$ beschreibt für $x > 0$ modellhaft die Schneefallrate in einem Skigebiet (x in Stunden nach 6 Uhr, $f(x)$ in cm pro Stunde).
Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von f.





Fragen im AFB I

- Zuordnen des Graphen
- Ermitteln der Schneefallrate nach einer Stunde
- Bestimmen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit (graphisch)
- Ermitteln des Zeitpunkts, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch)

Fragen im AFB II

- Berechnen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit
- Ermitteln des Zuwachses an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

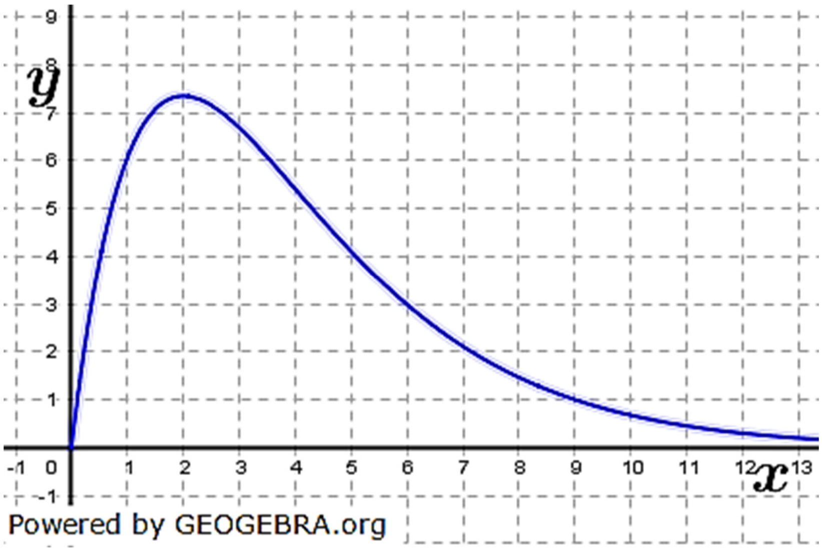
Fragen im AFB III

- Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt $x = 4$ an konstant ab. Erläutern, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien.
- Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von $2\,cm$ pro Stunde. Ermitteln der Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt.

Abituraufgaben Basisfach Analysis – Kolloquium - Musteraufgabe 11

Lösung M11

Lösungsvorbereitung:



Antworten im AFB I

- Zuordnen des Graphen:
  Abbildung 1 ist der Graph der Funktion. Der Graph der Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$ verläuft durch den Ursprung. Dies ist nur bei Abbildung 1 der Fall.

- Ermitteln der Schneefallrate nach einer Stunde
  Die Schneefallrate nach einer Stunde beträgt $6\ m/s$. Der Graph zeigt $f(1) = 6$.

- Bestimmen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit (graphisch)
  Am stärksten schneit es um 8 Uhr. Dort ist der Hochpunkt des Graphen von f.

- Ermitteln des Zeitpunkts, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch).
  Die Schneefallrate nimmt etwa um 10 Uhr am stärksten ab. Dort ist der Wendepunkt des Graphen von f mit negativer Steigung.

Antworten im AFB II

- Berechnen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit.
  Am Stärksten schneit es im Hochpunkt.
  Wir bilden die erste Ableitung nach der Produktregel:
  $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,5x} + 10x \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x}$
  $f'(x) = e^{-0,5x} \cdot (10 - 5x)$
  Wir setzen $f'(x)$ auf 0:
  $e^{-0,5x} \cdot (10 - 5x) = 0$
  Da $e^{-0,5x}$ nicht Null werden kann, gilt nach dem Satz vom Nullprodukt:
  $10 - 5x = 0$
  $5x = 10$
  $x = 2$
  2 Stunden nach Beobachtungsbeginnt – also um 8 Uhr – schneit es am stärksten.

- Ermitteln des Zuwachses an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

  Der Zuwachs der Schneehöhe entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall von 0 bis 5.
  Aus der Grafik lesen wir die Kästchen ab, es sind etwa 24 Kästchen. Die Fläche eines Kästchens entspricht $1\,cm$ Schnee / Stunde. Somit beträgt der Zuwachs der Schneehöhe etwa $24\,cm$ im Zeitraum von 5 Stunden.

<u>Antworten im AFB III</u>

- Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt $x = 4$ an konstant ab. Erläutern, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien.

  Wir müssen die Steigung von f an der Stelle $x = 4$ ermitteln, also $f'(4)$. Diese Steigung wird zur Steigung einer Tangente durch den Punkt $P(4|f(4))$. Danach müssen wir die Nullstelle der Tangente bestimmen und erhalten dadurch den Zeitpunkt, zu dem es aufhört zu schneien.

- Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von $2\,cm$ pro Stunde. Ermitteln der Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt.

  Der Graph der Funktion ist ja eine Änderungsrate. Der Tauvorgang ist auch eine Änderungsrate. Die Schneehöhe nimmt also in dem Zeitraum zu, in dem die Änderungsrate Schneefall größer ist als die Änderungsrate Tauvorgang.
  Wir müssen somit $f(t)$ auf 2 setzen und die entstehende Gleichung nach x auflösen. Wir erhalten dadurch zwei Werte, der erte Wert ist der Zeitpunkt ab dem die Schneehöhe zunimmt, der zweite Wert der Zeitpunkt, ab dem die Schneehöhe wieder abnimmt.