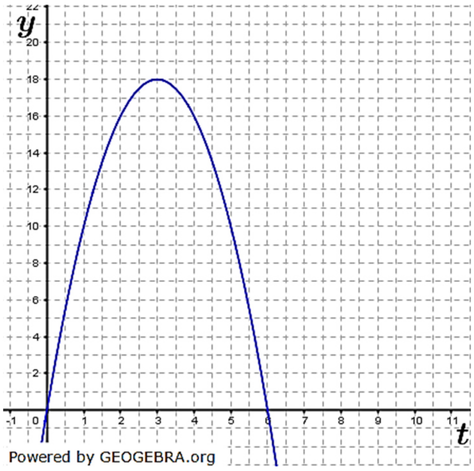
Abituraufgaben Basisfach Analysis – Kolloquium - Musteraufgabe 12

Lösung M12

Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Ermitteln Nullstellen und Extrempunkt eines Graphen:
  $f(t) = -2t^2 + 12t$
  Nullstellen mit $f(t) = 0$
  $-2t^2 + 12t = 0$
  $-2t \cdot (t - 6) = 0$
  $t_1 = 0$
  $t - 6 = 0 \;\rightarrow\; t_2 = 6$
  Extrempunkt mit $f'(t) = 0$:
  $f'(t) = -4t + 12$
  $-4t + 12 = 0 \;\rightarrow\; t = 3$
  y-Koordinate:
  $f(3) = -2 \cdot 9 + 12 \cdot 3 = 18$
- Skizze des Graphen:
  Siehe Grafik rechts.



Antworten im AFB II

- Ermitteln des zugeflossenen Wasservolumens in der ersten Stunde.
  Die Funktion ist gegeben als Zuflussrate. Die Menge in einem Zeitraum wird dann mittels Integral errechnet
  $\int_0^1 -2t^2 + 12t dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 6t^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 6 = \frac{16}{3}$
  In der ersten Stunde sind $\frac{16}{3}$ Liter Wasser zugeflossen.

- Graphisches Bestimmen der Zeitpunkte des minimalen und maximalen Wasservolumens unter der Voraussetzung eines konstanten Abflusses von 10 Liter pro Stunde.
  Das minimale Wasservolumen ist 1 Stunde nach Beobachtungsbeginn. Bis zu diesem Zeitpunkt fließt mehr Wasser ab (rote Linie) als zufließt.
  Das maximale Wasservolumen ist 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn, denn zwischen einer und 5 Stunden fließt mehr Wasser zu als ab.

- Rechnerisches Bestimmen des Wasservolumens nach 3 Stunden.
  Die Zu-, Abflussrate ist jetzt ja $f^*(t) = f(t) - 10$.
  Zufluss in den ersten 3 Stunden:
  $z = \int_0^3 (-2t^2 + 12t - 10)\, dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 - 10t\right]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 30 = 6$
  Bei einem Anfangsbestand von 20 Litern beträgt das Wasservolumen nach 3 Stunden 26 Liter.

- Beschreiben des Wasservolumens in Abhängigkeit von der Zeit.
  Das Wasservolumen nimmt anfänglich ab, da die Abflussrate zunächst größer ist als die Zuflussrate. Das Wasser erreicht 1 Stunde nach Beobachtungsbeginn sein kleinstes Volumen. Danach nimmt das Volumen wieder zu, da die Zuflussrate nun größer ist als die Abflussrate. Zum Zeitpunkt 5 Stunden ist das maximale Wasservolumen erreicht, danach nimmt es wieder ab.

Antworten im AFB III

- Ab Zeitpunkt $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist.
  Erläuterung der Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.

  Für den Gesamtzufluss bzw. -abfluss in den ersten 4 Stunden gilt
  $z_4 = \int_0^4 (f(t) - 10)dt$. Ab der Stunde 4 gelte die neue Abflussrate a. Dann gilt für den Gesamtzufluss bzw. -abfluss von Stunde 4 bis Stunde 6:
  $z_6 = \int_4^6 (f(t) - a)dt$.
  Da anfänglich 20 Liter Wasser im Becken sind, gilt:
  $20 + z_4 + z_6 = 0$
  $\int_4^6 (f(t) - a)dt = -20 - \int_0^4 (f(t) - 10)dt$
  Die Auflösung der entstehenden Gleichung nach a gibt dann die neue konstante Abflussrate ab $t = 4$ an.

Lösungsvideo
https://youtu.be/p60jE4d2HwM