



Musteraufgabe M12

Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = -2t^2 + 12t$.

In dem Intervall, in welchem $f(t) \geq 0$ ist, beschreibt f die momentane Zuflussrate von Wasser in ein Becken (t in Stunden; $f(t)$ in Liter pro Stunde).

Zu Beginn enthält das Becken 20 Liter Wasser.

Aspekte im AFB I

- Ermitteln von Nullstellen, Extrempunkt des Graphen von f .
- Erstellen einer Skizze des Graphen von f .

Aspekte im AFB II

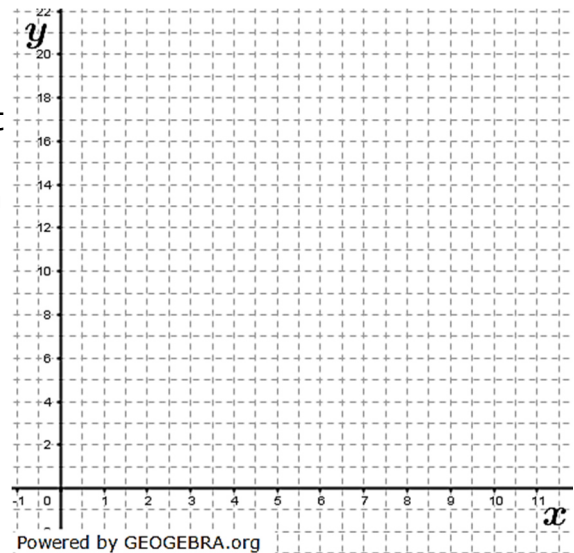
- Ermitteln des zugeflossenen Wasservolumens in der ersten Stunde.

Zusätzlich zum Zufluss konstanter Abfluss seit Beginn: 10 Liter pro Stunde

- Graphisches Bestimmen der Zeitpunkte des minimalen und maximalen Wasservolumens.
- Rechnerisches Bestimmen des Wasservolumens nach 3 Stunden.
- Beschreiben des Wasservolumens in Abhängigkeit von der Zeit.

Aspekte im AFB III

- Ab Zeitpunkt $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist.
Erläutern der Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.



Lösung M12

Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Ermitteln Nullstellen und Extrempunkt eines Graphen:

$$f(t) = -2t^2 + 12t$$

Nullstellen mit $f(t) = 0$

$$-2t^2 + 12t = 0$$

$$-2t \cdot (t - 6) = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t - 6 = 0 \rightarrow t_2 = 6$$

Extrempunkt mit $f'(t) = 0$:

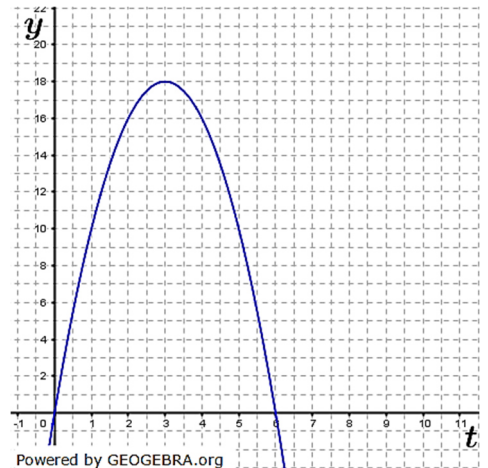
$$f'(t) = -4t + 12$$

$$-4t + 12 = 0 \rightarrow t = 3$$

y-Koordinate:

$$f(3) = -2 \cdot 9 + 12 \cdot 3 = 18$$

- Skizze des Graphen:
Siehe Grafik rechts.



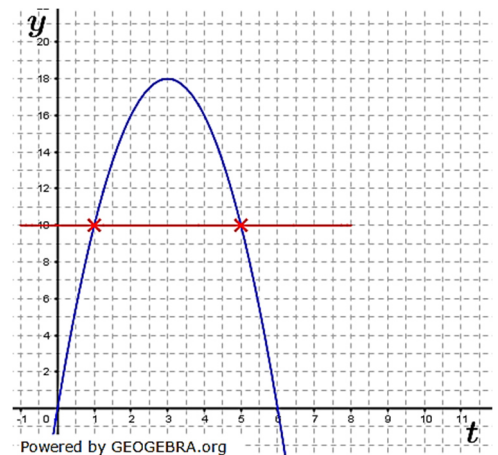
Antworten im AFB II

- Ermitteln des zugeflossenen Wasservolumens in der ersten Stunde.
Die Funktion ist gegeben als Zuflussrate. Die Menge in einem Zeitraum wird dann mittels Integral errechnet

$$\int_0^1 -2t^2 + 12t dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 6 = \frac{16}{3}$$

In der ersten Stunde sind $\frac{16}{3}$ Liter Wasser zugeflossen.

- Graphisches Bestimmen der Zeitpunkte des minimalen und maximalen Wasservolumens unter der Voraussetzung eines konstanten Abflusses von 10 Liter pro Stunde.
Das minimale Wasservolumen ist 1 Stunde nach Beobachtungsbeginn. Bis zu diesem Zeitpunkt fließt mehr Wasser ab (rote Linie) als zufließt.
Das maximale Wasservolumen ist 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn, denn zwischen einer und 5 Stunden fließt mehr Wasser zu als ab.



- Rechnerisches Bestimmen des Wasservolumens nach 3 Stunden.

Die Zu-, Abflussrate ist jetzt ja $f^*(t) = f(t) - 10$.

Zufluss in den ersten 3 Stunden:

$$z = \int_0^3 (-2t^2 + 12t - 10) dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 - 10t \right]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 30 = 6$$

Bei einem Anfangsbestand von 20 Litern beträgt das Wasservolumen nach 3 Stunden 26 Liter.

Abituraufgaben Basisfach Analysis – Kolloquium - Musteraufgabe 12

- Beschreiben des Wasservolumens in Abhängigkeit von der Zeit. Das Wasservolumen nimmt anfänglich ab, da die Abflussrate zunächst größer ist als die Zuflussrate. Das Wasser erreicht 1 Stunde nach Beobachtungsbeginn sein kleinstes Volumen. Danach nimmt das Volumen wieder zu, da die Zuflussrate nun größer ist als die Abflussrate. Zum Zeitpunkt 5 Stunden ist das maximale Wasservolumen erreicht, danach nimmt es wieder ab.

Antworten im AFB III

- Ab Zeitpunkt $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist. Erläuterung der Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.

Für den Gesamtzufluss bzw. -abfluss in den ersten 4 Stunden gilt

$z_4 = \int_0^4 (f(t) - 10) dt$. Ab der Stunde 4 gelte die neue Abflussrate a . Dann gilt für den Gesamtzufluss bzw. -abfluss von Stunde 4 bis Stunde 6:

$$z_6 = \int_4^6 (f(t) - a) dt.$$

Da anfänglich 20 Liter Wasser im Becken sind, gilt:

$$20 + z_4 + z_6 = 0$$

$$\int_4^6 (f(t) - a) dt = -20 - \int_0^4 (f(t) - 10) dt$$

Die Auflösung der entstehenden Gleichung nach a gibt dann die neue konstante Abflussrate ab $t = 4$ an.

Lösungsvideo

<https://youtu.be/p60jE4d2HwM>

Fit in Mathe Online Das Portal mit mehr als 500000 Aufgaben für Schule und Studium

Musteraufgabe 12
Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = -2t^2 + 12t$.
In dem Intervall, in welchem $f(t) \geq 0$ ist, beschreibt f die momentane Zuflussrate von Wasser in ein Becken (t in Stunden; $f(t)$ in Liter pro Stunde).
Zu Beginn enthält das Becken 20 Liter Wasser.

Aspekte im AFB I
Ermitteln von Nullstellen, Extrempunkt des Graphen von f .

Antworten im AFB I
Ermitteln Nullstellen und Extrempunkt eines Graphen:
 $f(t) = -2t^2 + 12t$
Nullstellen mit $f(t) = 0$
 $-2t^2 + 12t = 0$
 $-2t \cdot (t - 6) = 0$
 $t_1 = 0; t - 6 = 0 \rightarrow t_2 = 6$

Powered by GEOGEBRA.org