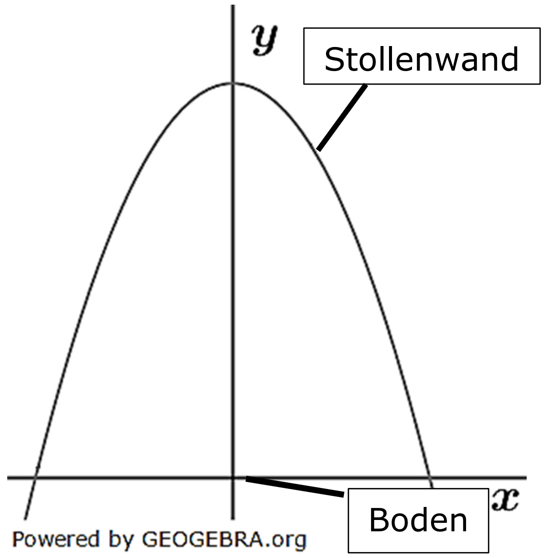
Musteraufgabe M13

Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse (Boden) und den Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$, der oberhalb der x-Achse verläuft (Stollenwände).



Aspekte im AFB I

- Skalieren der Achsen, Erklären der Form des Graphen.
- Berechnen der Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen.
- Ermitteln der Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.

Aspekte im AFB II

- Schließen auf Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen.
- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und läuft voll mit Wasser.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.

Aspekte im AFB III

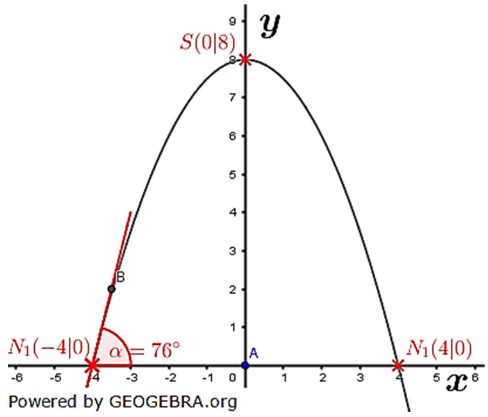
- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und es steht $3{,}5\,m$ hoch Wasser im Stollen.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.
- Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
  Ermitteln der maximal möglichen Breite des Behälters.

Lösung M12

Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Skalieren der Achsen, Erklären der Form des Graphen:
  Der Graph der Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel in $S(0|8)$.
  Zur Skalierung der -Achse berechnen wir zunächst die beiden Nullstellen über $f(x) = 0$.



  $-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0 \quad | \quad -\frac{1}{2}x^2; \cdot 23$
  $x^2 = 16 \quad | \quad \sqrt{}$
  $x_{1,2} = \pm 4$
  Damit können wir die Skalierung der Achsen vornehmen.
- Berechnung der Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen:
  Hierzu benötigen wir die Steigung in den Nullstellen.
  Steigungen ermitteln wir mit $f'(x)$. Wir leiten ab:
  $f'(x) = -x$
  $f'(-4) = 4$
  Die Tangente in $(-4|0)$ hat die Steigung 4. Dies ist der Tangens des mit der x-Achse gebildeten Winkels.
  $\alpha = arctan(4) = 75{,}96° \approx 76°$. Wegen der Achsensymmetrie des Graphen von f ist der Winkel bei $(4|0)$ ebenfalls etwa 76 °.
- Ermitteln der Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen:
  Steilste Stellen befinden sich in den Wendepunkten. Da eine Parabel keine Wendepunkte hat, die Parabel im Intervall $I = [-4|0]$ streng monoton fallend ist, liegen die steilsten Stellen in den Nullstellen.

Antworten im AFB II

- Schließen von Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen:
  Es gilt die NEW-Regel:

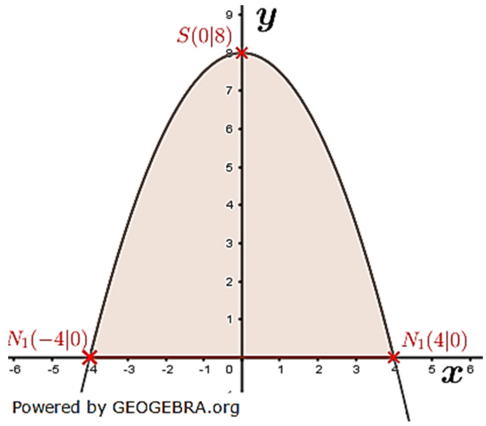
	***NEW*-Regel**						
Differenzieren ↓	$F(x)$	N_{VZW}	E	W			↑
	$f(x)$		N_{VZW}	E	W		
	$f'(x)$			N_{VZW}	E	W	Integrieren

N_{VZW} = Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, E = Extremstelle, W = Wendestelle
$F(x)$=Stammfunktion, $f(x)$=1. Ableitung von F, $f'(x)$=2. Ableitung von F

Weiterhin gilt:

- Verläuft f oberhalb der x–Achse, so ist F streng monoton steigend.
- Verläuft f unterhalb der x–Achse, so ist F streng monoton fallend.
- Ist f' negativ, so ist F rechtsgekrümmt.
- Ist f' positiv, so ist F linksgekrümmt.

- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und läuft voll mit Wasser.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.
  Das Volumen ist die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, multipliziert mit der Länge des Stollens.

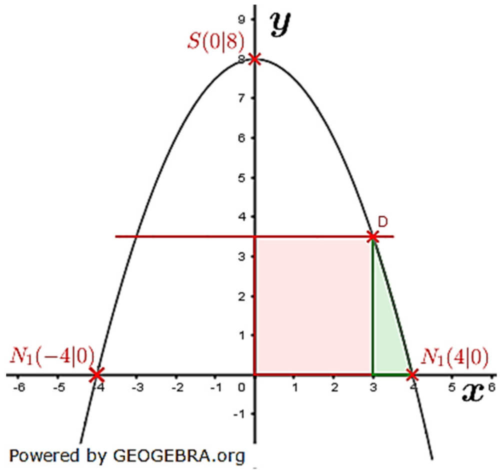


$$V = 50 \cdot \int_{-4}^{4}(-\tfrac{1}{2}x^2+8)\,dx$$
$$= 50 \cdot \left[-\tfrac{1}{6}x^3+8x\right]_{-4}^{4}$$
$$= 50 \cdot (-\tfrac{1}{6}\cdot 64 + 8\cdot(4) - \left(-\tfrac{1}{6}\cdot(-64)+8\cdot(-7)\right)$$
$$= 3333{,}33$$

Das Wasservolumen im Stollen beträgt ca. $3333\,m^3$ Wasser.

<u>Antworten im AFB III</u>

- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und es steht $3{,}5\,m$ hoch Wasser im Stollen.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.
  Das Wasservolumen ist nun die Fläche zwischen Wasserstandshöhe und dem Graphen von f multipliziert mit der Länge des Stollens.
  Aus Symmetriegründen betrachten wir nun lediglich die Situation zwischen $x_0 = 0$ und der rechten Nullstelle $x_1 = 4$.
  Wir benötigen zunächst den Schnittpunkt der Parallelen zur y-Achse im Abstand $3{,}5$ (Wasserhöhe) mit der Stollenwand.



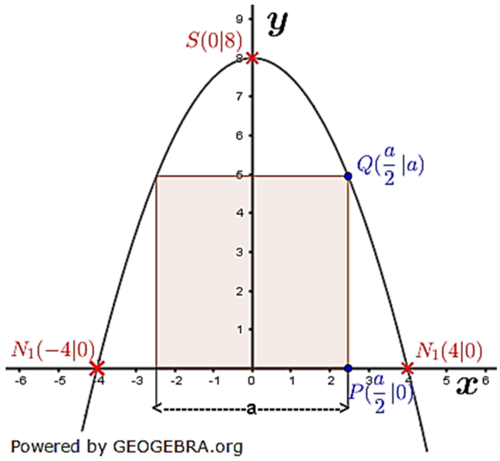
$$-\tfrac{1}{2}x^2+8 = 3{,}5$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 = 4{,}5$$
$$x^2 = 9; \implies x_{1,2} = \pm 3$$

Die mit 50 zu multiplizierende Fläche setzt sich nun zusammen aus dem (rot gekennzeichneten) Rechteck zuzüglich der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $I = \{3{,}4]$ (grün gekennzeichnet).

$$V_{\frac{1}{2}} = 50 \cdot \left(3\cdot 3{,}5 + \int_3^4 \left(-\tfrac{1}{2}x^2+8\right)dx\right)$$
$$= 50 \cdot \left(10{,}5 + \left[-\tfrac{1}{6}x^3+8x\right]_3^4 dx\right)$$
$$= 50 \cdot \left(10{,}5 - \tfrac{64}{6} + 32 - \left(-\tfrac{27}{6}+24\right)\right)$$
$$= 50 \cdot 12{,}33 = 616{,}67$$
$$V = 2 \cdot V_{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 616{,}67 = 1233{,}33$$

Das Wasservolumen im Stollen beträgt etwa $1233\,m^3$.

- Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
  Ermitteln der maximal möglichen Breite des Behälters.
  Die Grafik verdeutlicht die Situation.
  Die Strecke von der linken Ecke des Behälters bis zur rechten Ecke des Behälters sei a. Dann ist die Höhe des Behälters $f\left(\frac{a}{2}\right) = a$.
  Es muss also $f\left(\frac{a}{2}\right) = a$ sein, somit
  $a = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 8$
  $\frac{1}{8}a^2 + a - 8 = 0$
  $a^2 + 8a - 64 = 0$
  $a_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 64} = -4 \pm \sqrt{80}$
  $a = 4{,}94$
  Die maximal mögliche Breite des Behälters beträgt etwa $4{,}9\ m$.



Lösungsvideo
https://youtu.be/II7AHq75Jkw