Lösung M14

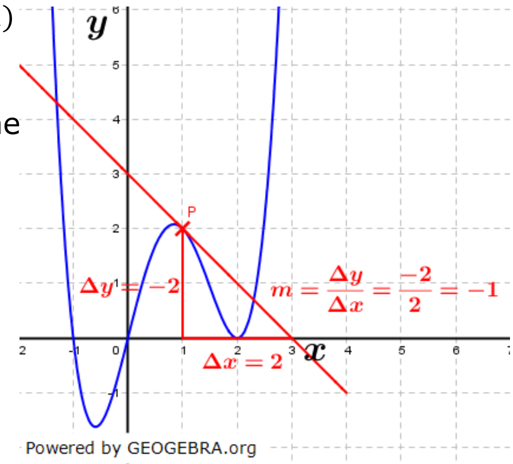
Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Bestimmen von $f'(1)$.
  Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab: $f'(1) = 2$.
- Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f.
  Der Graph von f besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung 2.
- Ermitteln der Nullstellen von f'.
  Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab: $x_1 = -1;\ x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ (doppelte Nullstelle).

Antworten im AFB II

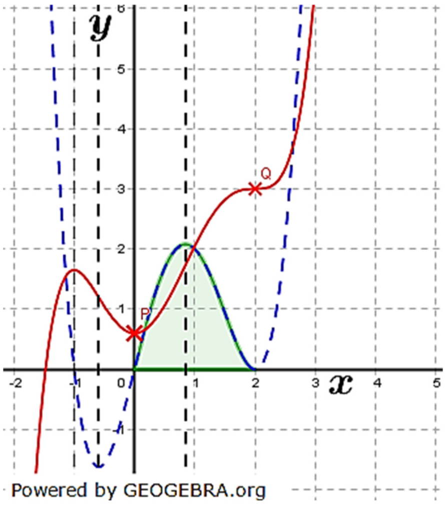
- Erläutern der Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f.
  Die Nullstelle bei $x_1 = -1$ ist eine Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„. Der Graph von f hat bei $x_1 = -1$ einen Hochpunkt.
  Die Nullstelle bei $x_2 = 0$ ist eine Nullstelle mit VZW von „-" nach „+„. Der Graph von f hat bei $x_2 = 0$ einen Tiefpunkt.
  Die Nullstelle bei $x_3 = 2$ ist eine doppelte Nullstelle. Der Graph von f hat bei $x_3 = 2$ einen Sattelpunkt.
- Untersuchung des Monotonieverhaltens von f.
  In den Intervallen, in denen f' unterhalb der x-Achse verläuft, ist f monoton fallend. In den Intervallen, in denen f' oberhalb der x-Achse verläuft, ist f monoton steigend.
  Dies bedeutet:
  f ist monoton fallend im Intervall $I =]-1; 0[$
  f ist monoton steigend in $I =]-\infty; -1[\vee I =]0; \infty[$
- Bestimmen eines Näherungswertes für $f''(1)$ und Erläuterung der Bedeutung für den Graphen von f.
  f'' ist die Ableitung von f'. Wir zeichnen eine Tangente in $P(1|2)$ von f' und bestimmen ein Steigungsdreieck.
  Wir erhalten $f''(1) = -1$, das heißt, der Graph von ist an dieser Stelle rechtsdrehend (rechtsgekrümmt).



- Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f.
  Ein Krümmungsverhalten wechselt in den Wendepunkten. Wendepunkte von f sind Extremstellen von f'. Damit ist
  f ist rechtsgekrümmt im Intervall $I =]-\infty; -0{,}5[\vee I =]0{,}8; 2[$, da f'' in diesen Intervallen negativ ist.
  f ist linksgekrümmt im Intervall $I =]-0{,}5; 0{,}8[\vee I =]2; \infty[$, da f'' in diesen Intervallen positiv ist.

- Erstellen einer Skizze des Graphen von f mit Zusatzinformationen $f(0) = 0{,}6$ und $f(2) = 3$:
  - Ermitteln des Inhalts der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0;2]$ mit der x-Achse einschließt.

  Zur Erstellung der Skizze gehen wir wie folgt vor:
  Wir ziehen eine Parallele zur y-Achse durch $x = -1$. Irgendwo auf dieser Linie liegt der Hochpunkt.
  Wir ziehen eine Parallele zur y-Achse durch $x = -0{,}6$. Irgendwo auf dieser Linie liegt ein Wendepunkt mit negativer Steigung.
  Wir ziehen eine Parallele zur y-Achse durch $x = 0{,}8$. Irgendwo auf dieser Linie liegt ein Wendepunkt mit positiver Steigung.
  Wir zeichnen den Punkt $P(0|0{,}6)$ ein, dort befindet sich der Tiefpunkt.
  Wir zeichnen den Punkt $Q(2|3)$ ein, dort befindet sich der Sattelpunkt.
  f hat von $-\infty$ bis $x = -1$ positive Steigung, somit kommt f aus dem III. Quadranten.
  Die Stammfunktion kann nun skizziert werden.



  Der Inhalt der Fläche ermittelt sich wie folgt:
  $A = \int_0^2 f'\,dx = [f(x)]_0^2 = f(2) - f(0)$.
  Sowohl $f(2)$ als auch $f(0)$ sind gegeben, somit
  $A = f(2) - f(0) = 3 - 0{,}6 = 2{,}4\,FE$.
  Die Fläche beträgt $2{,}4\,FE$.

- Begründen, ob $f(-1) < f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) > f(0)$.
  Da $f' < 0$ für $-1 \leq x \leq 0$ ist $f(-1) > f(0)$.

<u>Antworten im AFB III</u>

- Bestimmen des minimalen Grades einer Stammfunktion F von f.
  !!! ACHTUNG Glatteis !!!
  Gefragt ist nach F von f, abgebildet ist aber f'.
  f ist minimal vom Grad 5, da f' minimal vom Grad 4 ist. Somit ist F minimal vom Grad 6.
- Ermitteln eines möglichen Funktionsterms von f'.
  Der Graph von f' ist abgebildet. Er ist minimal vom Grad 4. Bekannt sind 2 einfache und eine doppelte Nullstelle, also insgesamt 4 Nullstellen. Somit können wir die Funktionsgleichung über die Nullstellenformel aufstellen und es gilt:
  $f'(x) = a \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-2)^2$
  Zur Berechnung von a lesen wir an der Grafik einen Punkt $S(1|2)$ ab und machen damit eine Punktprobe.
  $2 = a \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1-2)^2 = 2a \quad \rightarrow a = 1$
  Die Funktionsgleichung lautet:
  $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2 = x^4 - 3x^3 + 4x$

Lösungsvideo:
https://youtu.be/Buf8Sp2p6oU