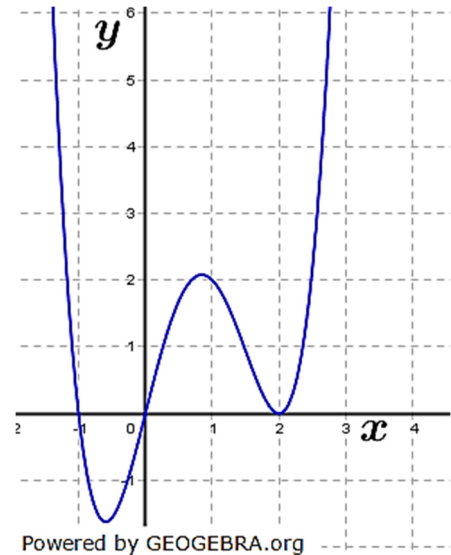




Musteraufgabe M14

Gegeben ist ausschnittsweise der Graph der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f .



Aspekte im AFB I

- Bestimmen von $f'(1)$.
- Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f .
- Ermitteln der Nullstellen von f' .

Aspekte im AFB II

- Erläutern der Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f .
- Untersuchung des Monotonieverhaltens von f .
- Bestimmen eines Näherungswertes für $f''(1)$ und Erläuterung der Bedeutung für den Graphen von f .
- Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f .
- Erstellen einer Skizze des Graphen von f mit Zusatzinformationen $f(0) = 0,6$ und $f(2) = 3$:
 - Ermitteln des Inhalts der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0; 2]$ mit der x -Achse einschließt.
- Begründen, ob $f(-1) < f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) > f(0)$.

Aspekte im AFB III

- Bestimmen des minimalen Grades einer Stammfunktion F von f .
- Ermitteln eines möglichen Funktionsterms von f' .

Lösung M14

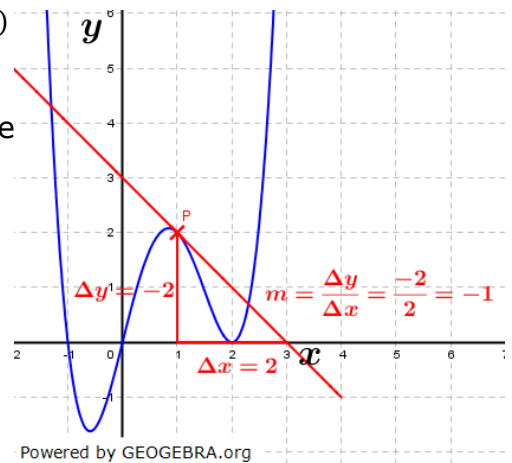
Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Bestimmen von $f'(1)$.
Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab: $f'(1) = 2$.
- Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f .
Der Graph von f besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung 2.
- Ermitteln der Nullstellen von f' .
Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ (doppelte Nullstelle).

Antworten im AFB II

- Erläutern der Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f .
Die Nullstelle bei $x_1 = -1$ ist eine Nullstelle mit VZW von „+“ nach „-“. Der Graph von f hat bei $x_1 = -1$ einen Hochpunkt.
Die Nullstelle bei $x_2 = 0$ ist eine Nullstelle mit VZW von „-“ nach „+“. Der Graph von f hat bei $x_2 = 0$ einen Tiefpunkt.
Die Nullstelle bei $x_3 = 2$ ist eine doppelte Nullstelle. Der Graph von f hat bei $x_3 = 2$ einen Sattelpunkt.
- Untersuchung des Monotonieverhaltens von f .
In den Intervallen, in denen f' unterhalb der x -Achse verläuft, ist f monoton fallend. In den Intervallen, in denen f' oberhalb der x -Achse verläuft, ist f monoton steigend.
Dies bedeutet:
 f ist monoton fallend im Intervall $I =] - 1; 0[$
 f ist monoton steigend in $I =] - \infty; -1[\vee I =]0; \infty[$
- Bestimmen eines Näherungswertes für $f''(1)$ und Erläuterung der Bedeutung für den Graphen von f .
 f'' ist die Ableitung von f' . Wir zeichnen eine Tangente in $P(1|2)$ von f' und bestimmen ein Steigungsdreieck.
Wir erhalten $f''(1) = -1$, das heißt, der Graph von f ist an dieser Stelle rechtsdrehend (rechtsgekrümmt).
- Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f .
Ein Krümmungsverhalten wechselt in den Wendepunkten. Wendepunkte von f sind Extremstellen von f' . Damit ist
 f ist rechtsgekrümmt im Intervall $I =] - \infty; -0,5[\vee I =]0,8; 2[$, da f'' in diesen Intervallen negativ ist.
 f ist linksgekrümmt im Intervall $I =] - 0,5; 0,8[\vee I =]2; \infty[$, da f'' in diesen Intervallen positiv ist.



Abituraufgaben Basisfach Analysis – Kolloquium - Musteraufgabe 14

- Erstellen einer Skizze des Graphen von f mit Zusatzinformationen $f(0) = 0,6$ und $f(2) = 3$:
 - Ermitteln des Inhalts der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0; 2]$ mit der x -Achse einschließt.

Zur Erstellung der Skizze gehen wir wie folgt vor:

Wir ziehen eine Parallele zur y -Achse durch $x = -1$.

Irgendwo auf dieser Linie liegt der Hochpunkt.

Wir ziehen eine Parallele zur y -Achse durch $x = -0,6$. Irgendwo auf dieser Linie liegt ein

Wendepunkt mit negativer Steigung.

Wir ziehen eine Parallele zur y -Achse durch $x = 0,8$.

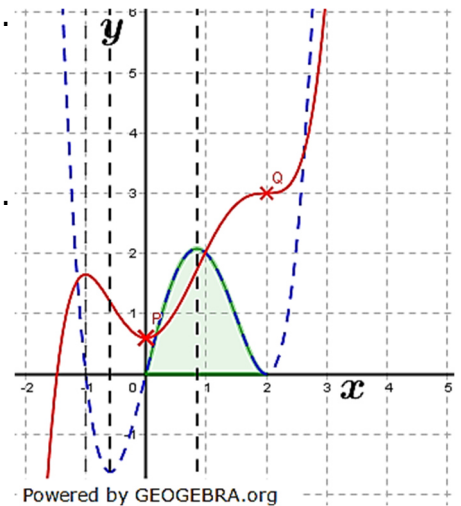
Irgendwo auf dieser Linie liegt ein Wendepunkt mit positiver Steigung.

Wir zeichnen den Punkt $P(0|0,6)$ ein, dort befindet sich der Tiefpunkt.

Wir zeichnen den Punkt $Q(2|3)$ ein, dort befindet sich der Sattelpunkt.

f hat von $-\infty$ bis $x = -1$ positive Steigung, somit kommt f aus dem III. Quadranten.

Die Stammfunktion kann nun skizziert werden.



Der Inhalt der Fläche ermittelt sich wie folgt:

$$A = \int_0^2 f' dx = [f(x)]_0^2 = f(2) - f(0).$$

Sowohl $f(2)$ als auch $f(0)$ sind gegeben, somit

$$A = f(2) - f(0) = 3 - 0,6 = 2,4 FE.$$

Die Fläche beträgt $2,4 FE$.

- Begründen, ob $f(-1) < f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) > f(0)$.
Da $f' < 0$ für $-1 \leq x \leq 0$ ist $f(-1) > f(0)$.

Antworten im AFB III

- Bestimmen des minimalen Grades einer Stammfunktion F von f .
!!! ACHTUNG Glatteis !!!
Gefragt ist nach F von f , abgebildet ist aber f' .
 f ist minimal vom Grad 5, da f' minimal vom Grad 4 ist. Somit ist F minimal vom Grad 6.
- Ermitteln eines möglichen Funktionsterms von f' .
Der Graph von f' ist abgebildet. Er ist minimal vom Grad 4. Bekannt sind 2 einfache und eine doppelte Nullstelle, also insgesamt 4 Nullstellen. Somit können wir die Funktionsgleichung über die Nullstellenformel aufstellen und es gilt:
$$f'(x) = a \cdot x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2$$

Zur Berechnung von a lesen wir an der Grafik einen Punkt $S(1|2)$ ab und machen damit eine Punktprobe.
$$2 = a \cdot 1 \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 2)^2 = 2a \rightarrow a = 1$$

Die Funktionsgleichung lautet:
$$f'(x) = x(x + 1)(x - 2)^2 = x^4 - 3x^3 + 4x$$

Lösungsvideo:

<https://youtu.be/Buf8Sp2p6oU>

Fit in Mathe Online
Das Portal mit mehr als 500000 Aufgaben für Schule und Studium

Musteraufgabe 14
Gegeben ist ausschnittsweise der Graph der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f .

Aspekte im AFB I
Bestimmen von $f'(1)$.
Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f .
Ermitteln der Nullstellen von f' .

Powered by GEOGEBRA.org