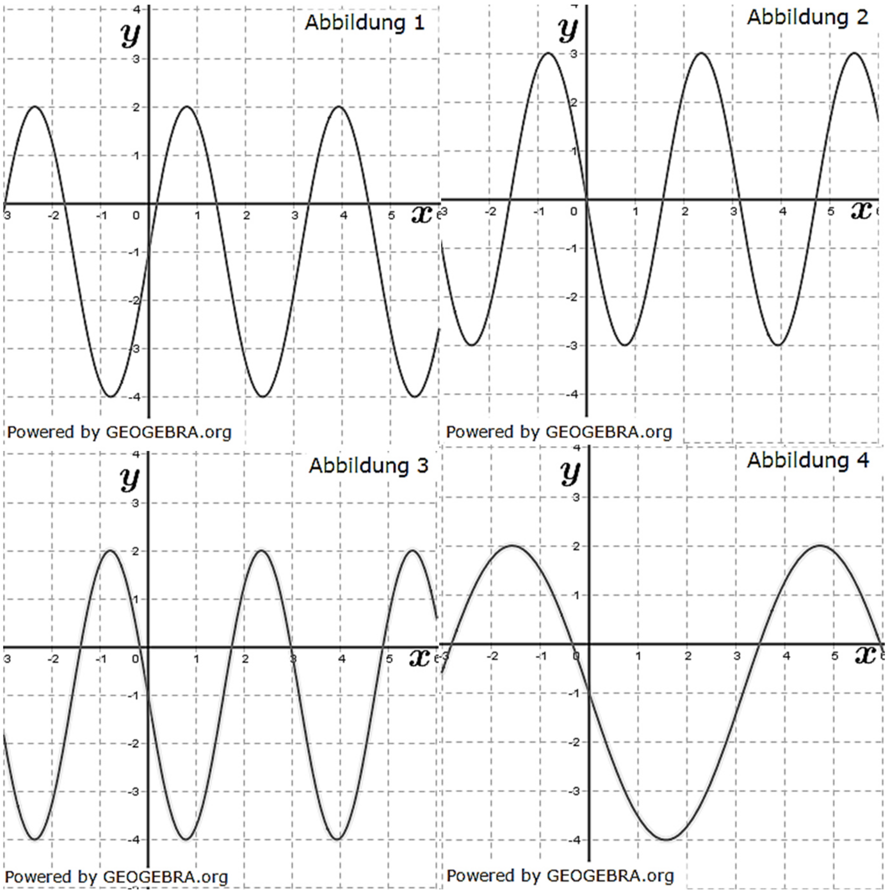
Musteraufgabe M15

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin(2x) - 1$ sowie vier Graphen.



Aspekte im AFB I

- Nennen von charakteristischen Eigenschaften des Graphen von f, die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.
- Zuordnen eines der vier Graphen zu f.

Aspekte im AFB II

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g, für die gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx = -3$. Bestimmen des Wertes von $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx$ ohne weitere Rechnung.
- Bestimmung einer Stammfunktion F von f.
- Untersuchen der Symmetrieeigenschaften des Graphen von f'.

Aspekte im AFB III

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g. Erläutern, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgeraden und des Graphen von g nicht gerade (z. B. 266) sein kann (Symmetrie).
- Herleiten von $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -2$, ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve.

Lösung M15

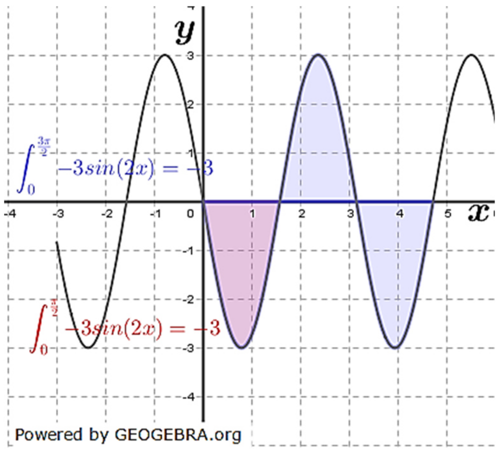
Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Nennen von charakteristischen Eigenschaften des Graphen von f, die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.
  Der Graph der Funktion ist
  1. in y-Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt;
  2. an der x-Achse gespiegelt;
  3. in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt sowie
  4. in y-Richtung um eine Einheit nach unten geschoben.
- Zuordnen eines der vier Graphen zu f.
  Abbildung 3 gehört zum Graphen von f, denn nur diese Abbildung entspricht den zuvor erwähnten Eigenschaften.

Antworten im AFB II

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g, für die gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx = -3$. Bestimmen des Wertes von $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx$ ohne weitere Rechnung.
  Der Wert ist $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx = -3$, denn die Funktion g hat die Periode π und die obere Grenze des 2. Integrals ist genau um π größer als die des 1. Integrals.



- Bestimmung einer Stammfunktion F von f.
  $F(x) = \int(-3 \cdot sin(2x) - 1)dx =$
  $-\frac{3}{2}cos(2x) + x + C$
- Untersuchen der Symmetrieeigenschaften des Graphen von f'.
  f' ist die Ableitung von f. Nach den Ableitungsregeln ergibt sich eine in x-Richtung unverschobene Kosinusfunktion. Eine solche Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Antworten im AFB III

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g. Erläutern, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgeraden und des Graphen von nicht gerade (z. B. 266) sein kann (Symmetrie)
  Sowohl die Funktion g als auch die Ursprungsgerade haben den Ursprung als Schnittpunkt. Steile Geraden, die nur im Ursprung schneiden, haben somit einen Schnittpunkt. Flachere Geraden, die g wieder schneiden haben rechts des Ursprungs UND links des Ursprungs eine oder zwei gemeinsame Punkte. Somit ergibt sich zusammen mit dem Ursprung stets eine ungerade Anzahl gemeinsamer Punkte.

- Herleiten von $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -2$, ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve.
  Das Integral einer Summenfunktion lässt sich in Einzelintegrale aufteilen.
  $\int_{-1}^{1}(-3 \cdot sin(2x) - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} -3\sin(2x)\,dx - \int_{-1}^{1} 1\,dx$
  Wegen der Punktsymmetrie einer weder in x-Richtung noch in y-Richtung verschobenen Sinusfunktion ist $\int_{-1}^{1} -3\sin(2x)\,dx = 0$, sodass zur Berechnung des Summenintegrals lediglich das Teilintegral $\int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2$ Einfluss hat, also ist
  $\int_{-1}^{1}(-3 \cdot sin(2x) - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} -3\sin(2x)\,dx - \int_{-1}^{1} 1\,dx = 0 - 2 = -2.$

Lösungsvideo:
https://youtu.be/Buf8Sp2p6oU