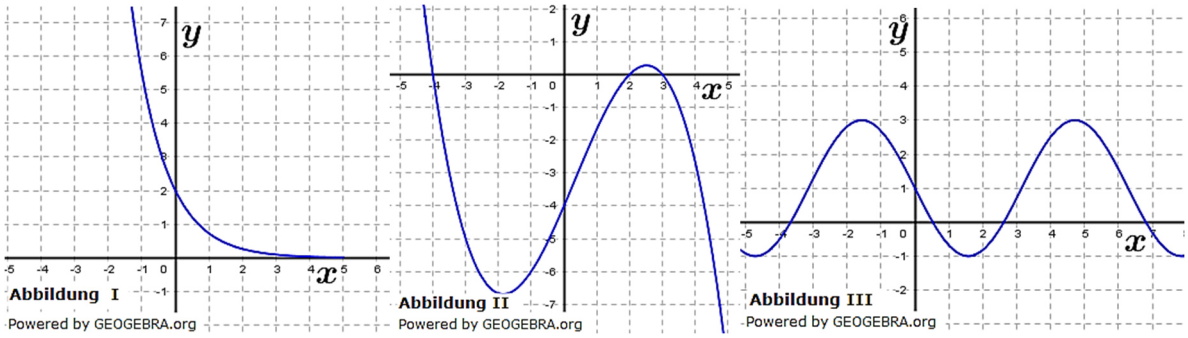
Musteraufgabe M01

Die Abbildungen zeigen die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g und einer Exponentialfunktion h.



a) Ordnen Sie die Funktionen f, g und h den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

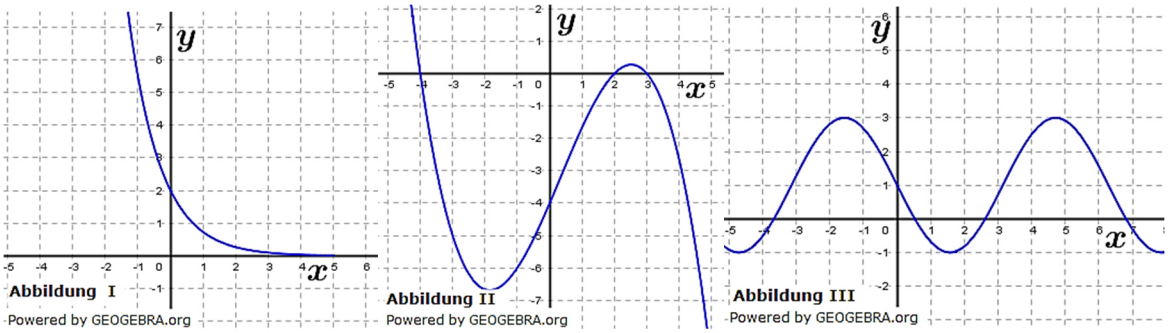
b) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c) Der Graph der Funktion in Abbildung II schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man den Inhalt dieser Fläche berechnen kann und geben Sie einen entsprechenden Rechenausdruck an.

d) Gegeben ist die Funktion i mit $i(x) = -e^{-x}$.
Berechnen Sie a so, dass $\int_a^0 i(x)\,dx = -2$ gilt.
Bestimmen Sie eine nichtkonstante ganzrationale Funktion j und Werte für b und c, so dass gilt $\int_b^c j(x)\,dx = -8$

Lösung M01

Lösungsvorbereitung:



a) Wir sollen den Abbildungen 1 bis 3 Graphen einer ganzrationalen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g sowie einer Exponentialfunktion h zuordnen.
Abbildung 2 gehört zum Graphen f. Der Graph hat einen Tiefpunkt, einen Hochpunkt, einen Wendepunkt sowie drei Nullstellen bei $x_1 = -4,\ x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Er verläuft aus dem zweiten Quadranten in den vierten Quadranten.
Abbildung 3 gehört zum Graphen g, der trigonometrischen Funktion mit gleichbleibendem Ausschlag nach unten und oben und periodisch wiederkehrenden Funktionswerten.
Abbildung 1 gehört somit zum Graphen von h, einer Exponentialfunktion. Der Graph hat die x-Achse als waagrechte Asymptote für x nach $+\infty$. Er verläuft für x nach $-\infty$ nach $+\infty$.

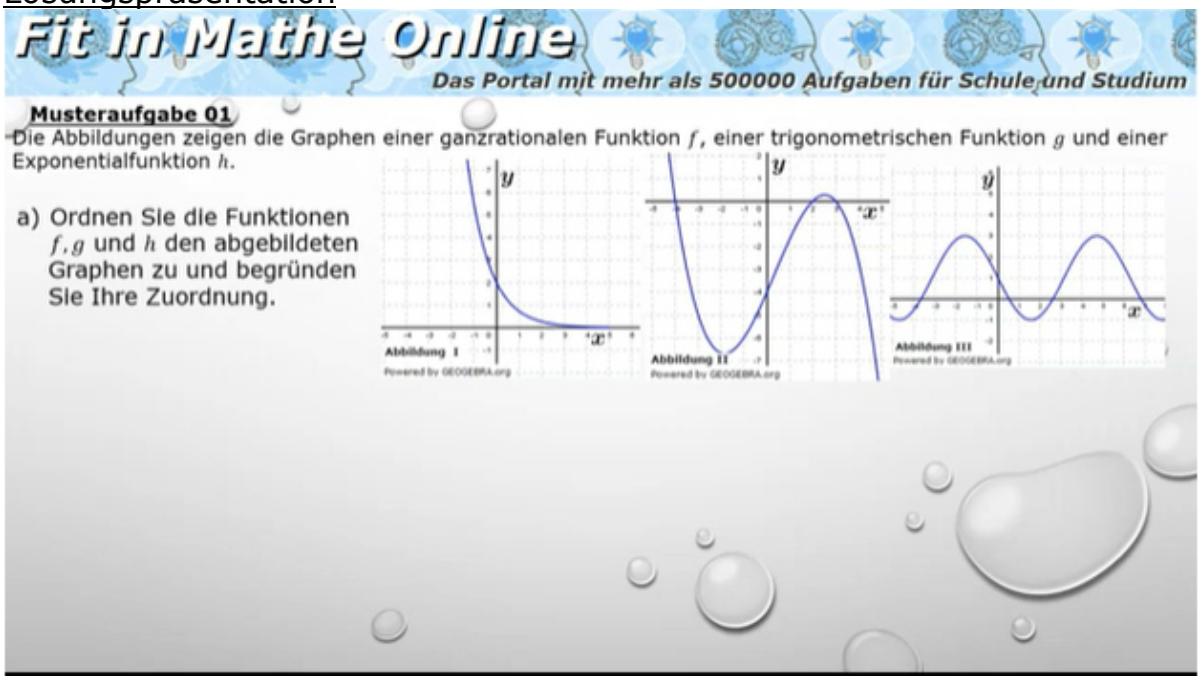
b) Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit drei gegebenen Nullstellen. Mithilfe der Nullstellengleichung ergibt sich zunächst
$f(x) = a \cdot (x+4) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.
Die Punktprobe mit $f(0) = -4$ führt zu
$-4 = a \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 24a$.
Daraus folgt: $a = -\frac{1}{6}$.
$f(x) = -\frac{1}{6}(x+4) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.
Funktion g ist eine trigonometrische Funktion mit einer Periode von $p = 2\pi$, einer Amplitude von $a = 2$ und einer Verschiebung in y-Richtung um $d = 1$. Wegen der negativen Steigung bei $x_0 = 0$ ist es eine an der x-Achse gespiegelte Sinuskurve.
$g(x) = -2 \cdot sin(x) + 1$
Funktion f ist eine Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion e^x wurde an der y-Achse gespiegelt, was zu e^{-x} führt und dann in y-Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt. Ihre Gleichung lautet
$h(x) = 2 \cdot e^{-x}$.

c) Die Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt erstreckt sich zwischen den Nullstellen $x_1 = -4;\ x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Da nach dem Flächeninhalt gefragt ist, ein Teil der Fläche unterhalb und ein Teil oberhalb der x-Achse sich befindet, muss das Integral aufgeteilt werden. Und zwar in
$A = \left|\int_{-4}^{2} f(x)\,dx\right| + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

d) Wir sollen zunächst den Wert einer Integralgrenze bestimmen.
Für welches a ist der Wert des Integrals von a bis 0 der Funktion $-e^{-x}$ gleich -2.
Wir bilden die Stammfunktion, setzen die obere Grenze 0 ein und subtrahieren die untere Grenze a.
$\int_a^0 -e^{-x}\,dx = [e^{-x}]_a^0 = 1 - e^{-a}$.
Der Ergebnisterm soll den Wert -2 annehmen.
$1 - e^{-a} = -2$
$-e^{-a} = -3$
$-a = ln\,(3)$
$a = -ln\,(3)$
Des Weiteren soll eine nicht konstante ganzrationale Funktion j bestimmt werden, deren Integral in den Grenzen von b bis c den Wert -8 haben soll.
Als nichtkonstante, ganzrationale Funktion wählen wir z. B. eine Ursprungsgerade mit der Form $j(x) = -x$ (ganzrationale Funktion 1. Grades).
Der Teil des unterhalb der x-Achse verlaufenden Graphen beginnt bei $x_0 = 0$.
Damit können wir wählen:
$b = 0;\quad c = c$
$\int_0^c -x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = -\frac{1}{2}c^2$
$\frac{1}{2}c^2 = 8$
$c^2 = 16$
$c_{1,2} = \pm 4$
Wegen $\int_0^c$ ist nur $+4$ Lösung der Aufgabe.

Lösungspräsentation



https://www.youtube.com/watch?v=xmOcO1URszE&ab_channel=Fit-in-Mathe-Online

Musteraufgabe M02

Die Geschwindigkeit eines Autos auf einer Teststrecke wird beschrieben durch eine Funktion f mit $f(x) = 24 + 24 \cdot e^{-0{,}08x}$; $0 \leq x \leq 60$ (x in Sekunden, $f(x)$ in Meter pro Sekunde).

a) Berechnen Sie $f(0)$ und $f'(0)$ und $\int_0^{60} f(x)\,dx$.
Deuten Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Das Auto und ein Motorrad befinden sich zum Zeitpunkt $x = 0$ nebeneinander und fahren in den nächsten 60 Sekunden in die gleiche Richtung.
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f und den Graphen der Funktion g, die die Geschwindigkeit des Motorrads beschreibt.

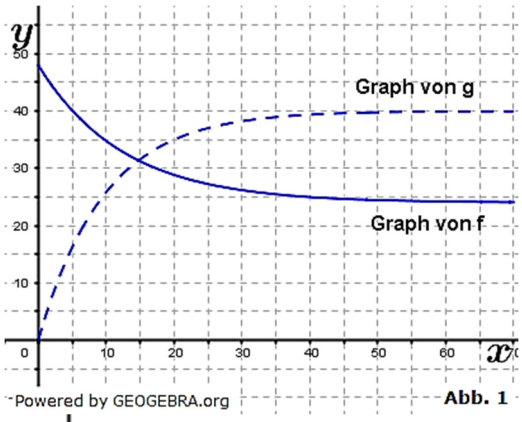
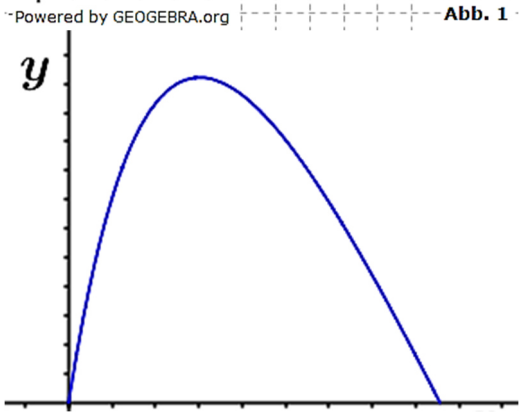


Abb. 1

b) Beschreiben Sie die Bewegungen des Autos und des Motorrades.

c) Abbildung 2 stellt für einen Ausschnitt der Fahrt den Abstand der beiden Fahrzeuge dar.
Beschreiben Sie, wie man die x-Koordinate des Punktes H mithilfe von Abbildung 1 ermitteln kann. Entscheiden Sie, ob die y-Koordinate von H größer als 500 ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



d) Das Motorrad überholt das Auto zum Zeitpunkt x_0. Bestimmen Sie eine Gleichung, mit der man bei gegebenem Funktionsterm von g den Zeitpunkt x_0 berechnen kann.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M02

Lösungsvorbereitung:

a) $f(x) = 24 + 24 \cdot e^{-0{,}08x}$; $0 \leq x \leq 60$.

$f(0) = 24 + 24 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 0} = 24 + 24 \cdot e^{0} = 48$

$f'(x) = 24 \cdot (-0{,}08) \cdot e^{-0{,}08x} = -1{,}92 \cdot e^{-0{,}08x}$

$f'(0) = -1{,}92 \cdot e^{0} = -1{,}92$

$$\int_0^{60} 24 + 24 \cdot e^{-0{,}08x}\, dx = \left[24x - \frac{24 \cdot e^{-0{,}08x}}{0{,}08}\right]_0^{60} = \left[24x - 300 \cdot e^{-0{,}08x}\right]_0^{60}$$
$$= 24 \cdot 60 - 300 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 60} - (-300 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 0})$$
$$= 1440 - 2{,}469 + 300 = 1737{,}53$$

Das Auto legt in den ersten 60 Sekunden etwa $1{,}74\ km$ zurück.

b) Die Geschwindigkeit des Autos nimmt stets ab, wobei die Abnahme immer geringer wird.
Das Motorrad hat zu Beobachtungsbeginn die Geschwindigkeit 0 Meter pro Sekunde, seine Geschwindigkeit nimmt stets zu, wobei die Zunahme immer geringer wird.

c) Beschreibung

Die x-Koordinate von H ist die Schnittstelle der beiden Graphen f und g und liegt etwa bei 15 Sekunden.

Zum besseren Verständnis, muss nicht vorgetragen werden:

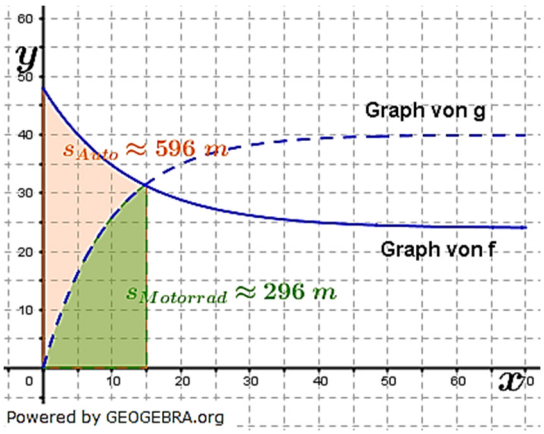
Die Geschwindigkeit des Autos ist bis zum Schnittpunkte der beiden Graphen größer als die des Motorades. Somit ist die zurückgelegte Strecke des Autos größer als die Strecke des Motorades.
Nach dem Schnittpunkt der beiden Graphen ist die Geschwindigkeit des Motorades größer als die des Autos. Somit holt das Motorrad das Auto langsam wieder ein.
Ergo sind im Schnittpunkt die beiden Fahrzeuge am weitesten voneinander entfernt.

Entscheidung

Die y-Koordinate von H entspricht dem Inhalt der Fläche, die von den Graphen von g und h und der y-Achse eingeschlossen wird. Dieser Wert ist offensichtlich kleiner als 500 (Kästchen zählen).

Zum besseren Verständnis, muss nicht vorgetragen werden:

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Die Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen entspricht somit der zurückgelegten Strecke (Integral). Aus nebenstehender Graphik ist ersichtlich, dass die Strecke zwischen den beiden Fahrzeugen dem Integral aus oberer Kurve (Auto) und unterer Kurve (Motorrad) im Intervall von 0 bis 15 entspricht.



d) Zum Zeitpunkt x_0 haben beide Fahrzeuge die gleiche Strecke zurückgelegt (Motorrad überholt Auto). x_0 ist damit die Lösung der Gleichung $\int_0^{x_0} f(x)\,dx = \int_0^{x_0} g(x)\,dx$.

<u>Lösungspräsentation</u>
Siehe Video

unter
https://www.youtube.com/watch?v=Ab7MU1tbeAc&feature=emb_logo&ab_channel=Fit-in-Mathe-Online

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M03

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$.

a) Abbildung 1 zeigt den Graphen von f. Erläutern Sie, wie man den Graphen von f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = sin\,(x)$ erhält.

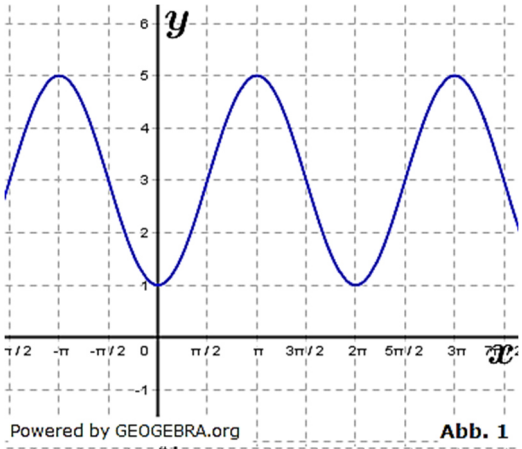


Abb. 1

b) Eine der Abbildungen 2 und 3 zeigt den Graphen von f'.
Entscheiden Sie, in welcher der Abbildungen der Graph von f' dargestellt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0$ gilt.

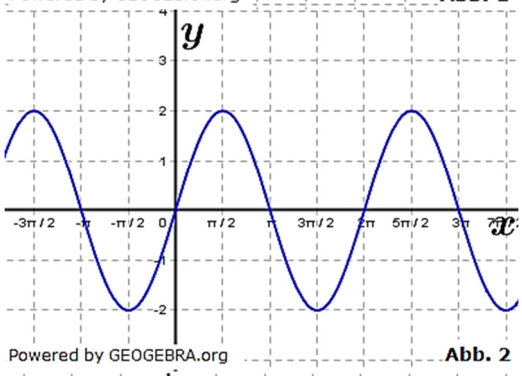


Abb. 2

c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} 5 - f(x)\,dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.

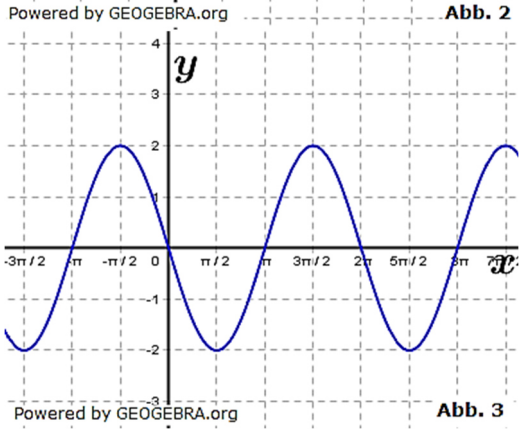


Abb. 3

Lösung M03

Lösungsvorbereitung:

a) Der Graph der Funktion f geht aus dem Graphen der Funktion g hervor durch:
   1. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2;
   2. Verschiebung in y-Richtung um drei Einheiten nach oben;
   3. Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ Einheiten nach rechts.

b) Abbildung 2 zeigt den Graphen von f'.
f hat z.B. eine Hochpunkt bei $x = \pi$. Ein Hochpunkt führt in der 1. Ableitung zu einer Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„. Nur Abbildung 2 hat eine solche Nullstelle.

$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0$ da $f(\pi) = 5$ und $f(-\pi) = 5$ und damit $f(\pi) - f(-\pi) = 0$.

c) $$\int_0^{\pi} 5 - \left(2 \cdot sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\right) dx = \int_0^{\pi} 2 - 2 \cdot sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{\pi} 1 - sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2 \cdot \left[x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 2 \cdot \left(\pi - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$
$$= 2(\pi - 0 + 0) = 2\pi$$

Interpretation:
Die Fläche, die von der Geraden $y = 5$ und der Funktion f im Intervall $I = [0; \pi]$ eingeschlossen ist, beträgt $2\pi\ FE$.

d) Die Aussage ist falsch.
Wegen der Angabe eines „beliebigen" Hochpunktes und „beliebigen" Tiefpunktes kann die Periode der Funktion nicht eindeutig bestimmt werden. Eine eindeutige Bestimmung wäre nur möglich, wenn es hieße „Eines beliebigen Hochpunktes und des unmittelbar davor oder dahinter liegenden Tiefpunktes".

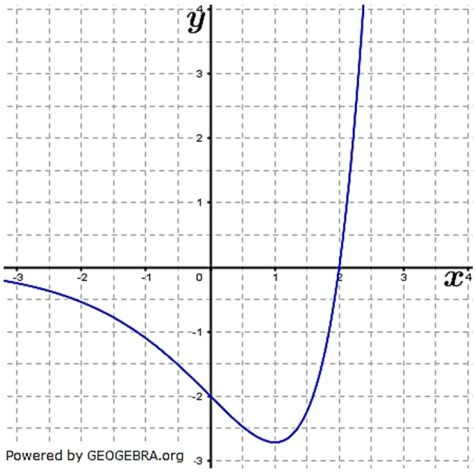
Lösungspräsentation

Siehe Video unter
https://www.youtube.com/watch?v=rN5dqz8bVMo&feature=emb_logo&ab_channel=Fit-in-Mathe-Online

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M04
(Aufgabe ist ohne WTR zu lösen)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



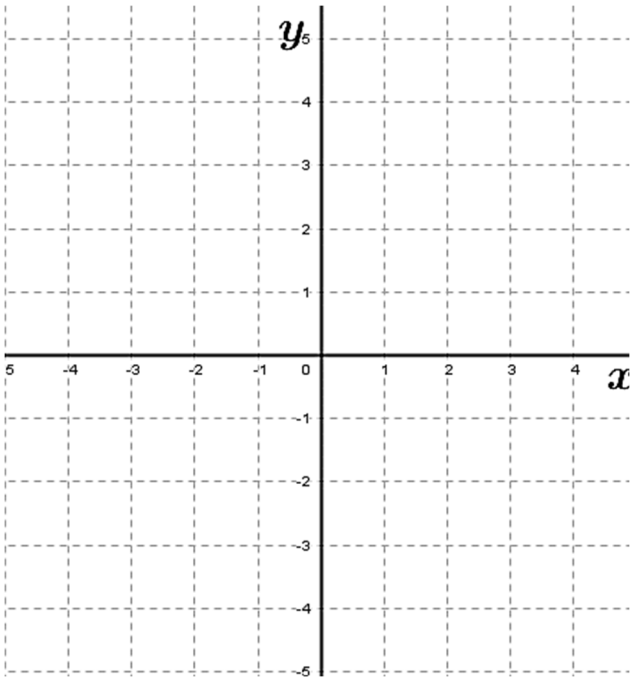
a) Bestimmen Sie $f'(0)$.

b) Ermitteln Sie $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) F ist eine Stammfunktion von f.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Graphen von f, ob der Graph von F im abgebildeten Bereich Hoch-, Tief- bzw. Wendepunkte besitzt. Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Stellen an.

d) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionsgleichung zu f gehört:
$f_1(x) = (x-2)\cdot e^{-x}$; $f_2(x) = (x-2)\cdot e^{x}$;
$f_3(x) = x\cdot e^{x} - 2$;
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Der Graph der Funktion g mit $g(x) = (x-2)^2\cdot e^{x}$ besitzt den Hochpunkt $H(0|4)$.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das beigefügte Koordinatensystem und erläutern Sie Ihr Vorgehen.



Lösung M04

Lösungsvorbereitung:

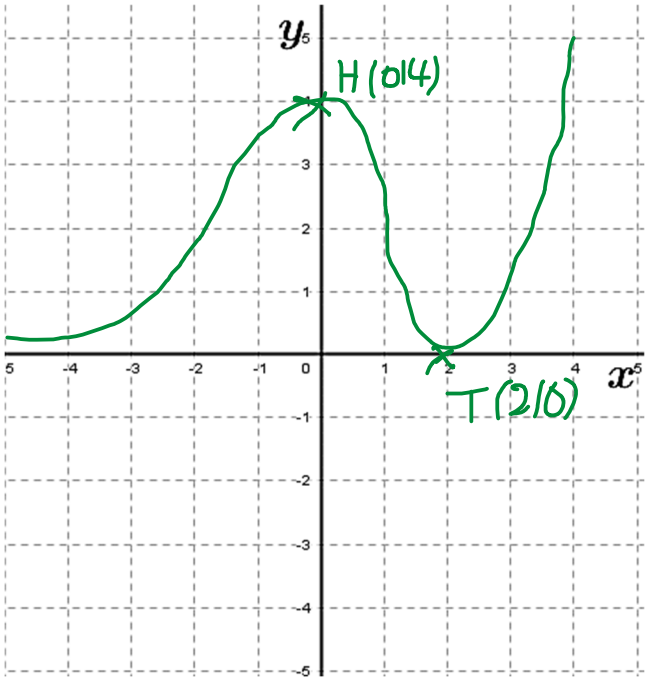
a) $f'(0)$:
Legt man eine Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 0$, so lässt sich eine Steigung an dieser Stelle von etwa -1 ablesen.
$f'(0) = -1$

b) $\int_0^2 f(x)\,dx$
Wir zählen die Anzahl der Kästchen zwischen dem Graphen von f und der x-Achse. Es sind zwischen 14 und 15 Kästchen. Jedes Kästchen hat den Flächeninhalt $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse.
$\int_0^2 f(x)\,dx \approx -\frac{17}{4}$.

c) Nach der NEW-Regel gilt:
Der Graph von F hat bei $x = 2$ einen Tiefpunkt, da f dort eine Nullstelle mit VZW von „-„ nach „+" aufweist.
Der Graph von F hat bei $x = 1$ eine Wendestelle mit negativer Steigung, da f dort einen Tiefpunkt mit $f(1) \approx -2{,}7$ hat.
Andere markante Punkte können im abgebildeten Bereich nicht benannt werden.

d) Der Graph ist der Graph der Funktion f_2 mit $f_2(x) = (x-2) \cdot e^x$.
Er besitzt an der Stelle $x = 2$ eine einfache Nullstelle. Der globale Verlauf für $x \to \pm\infty$ stellt sich wie folgt dar:
Für $x \to +\infty$ läuft $f_2(x) \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ läuft $f_2(x) \to 0$.

e) Trage als erstes den Punkt $H(0|4)$ ein.
Markiere denn die doppelte Nullstelle bei $x = 2$.
Überlege das globale Verhalten.
Für $x \to +\infty$ läuft $g(x) \to +\infty$.
Für $x \to -\infty$ läuft $g(x) \to 0$, somit ist die x-Achse Asymptote.
Die Skizze kann jetzt erstellt werden.

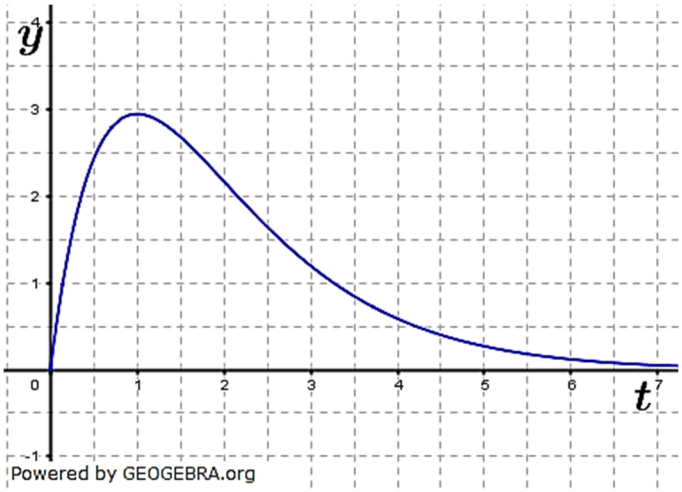


Lösungspräsentation
Siehe Video unter
https://www.fit-in-mathe-online.de/abituraufgaben-allgemeinbildendes-gymnasium/basisfach-analysis/musteraufgabe-m04#loesungspraesentation

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M05

Die Funktion f beschreibt für $t > 0$ die Wachstumsrate einer Pflanze. Die Zeit t wird dabei in Tagen und die Wachstumsrate $f(t)$ in cm pro Tag angegeben. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f.



a) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f'(2)$ und $\int_0^2 f(t)\,dt$.

b) Bestimmen Sie die ungefähre Höhe der Pflanze nach dem zweiten Tag, wenn die Pflanze zu Beobachtungsbeginn $20\,cm$ hoch war.

c) Die Funktion f hat den Funktionsterm $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$.
Für die Ableitung f' von f gilt: $f'(t) = e^{-t} \cdot (8 - 8t)$.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate der Pflanze am stärksten abnimmt.

d) F ist eine Stammfunktion von f. Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $F(t+1) = F(t) + 2{,}5$ führt. Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung eine Lösung dieser Gleichung ermitteln kann.

Lösung M05

Lösungsvorbereitung:

a) $f'(2)$:
Legt man eine Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$, so lässt sich eine Steigung an dieser Stelle von etwa -1 ablesen.
$f'(2) \approx -1$
$\int_0^2 f(t)\,dt$
Wir zählen die Anzahl der Kästchen zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $I = [0; 2]$. Es sind etwa 19 Kästchen. Jedes Kästchen hat den Flächeninhalt $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse.
$\int_0^2 f(t)\,dt \approx \frac{19}{4}$.

b) Wir addieren zum Ergebnis von Teilaufgabe a) die Anfangshöhe der Pflanze.
$h = 20 + \frac{19}{4} = 24{,}75$.
Die Pflanze ist nach dem 2. Beobachtungstag etwa $24{,}75\ cm$ groß.

c) Stärkste Zu- bzw. Abnahmen von Änderungsraten finden in den Wendepunkten statt. Die erste Ableitung ist gegeben, wir bilden die zweite Ableitung:
$f''(t) = -e^{-t} \cdot (8 - 8t) - 8 \cdot e^{-t} = e^{-t}(-8 + 8t - 8)$
$\quad = e^{-t} \cdot (8t - 16)$.
Für Wendepunkte zweite Ableitung auf null setzen:
$e^{-t} \cdot (8t - 16) = 0$ | Satz vom Nullprodukt.
$8t - 16 = 0$ ➔ $t = 2$
Wir prüfen die Steigung für $t = 2$:
$f'(2) = e^{-2} \cdot (8 - 16) < 0$
Etwa 2 Tage nach Beobachtungsbeginn nimmt die Wachstumsrate der Pflanze am stärksten ab.

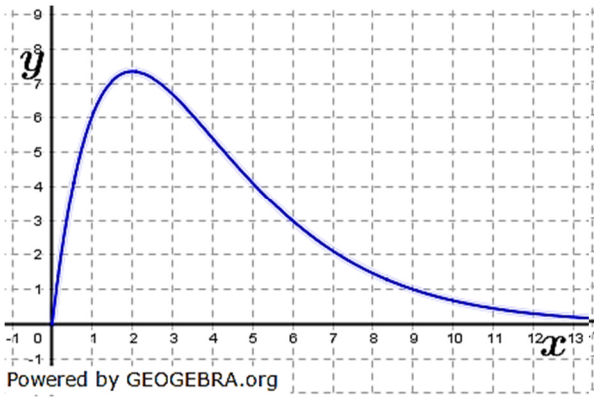
d) $F(t + 1) = F(t) + 2{,}5$
Innerhalb welchem 1-Tageszeitraum wächst die Pflanze um $2{,}5\ cm$?
Gesucht ist das Intervall $I = [t; t + 1]$ welches zu $\int_t^{t+1} f(t)dt = 2{,}5$ führt.
Dies ist in der Grafik ein senkrechter Streifen der Breite 1, der aus der Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $2{,}5$ ausschneidet. Die Lage des linken Randes des Streifens ist dann eine Lösung der Gleichung.

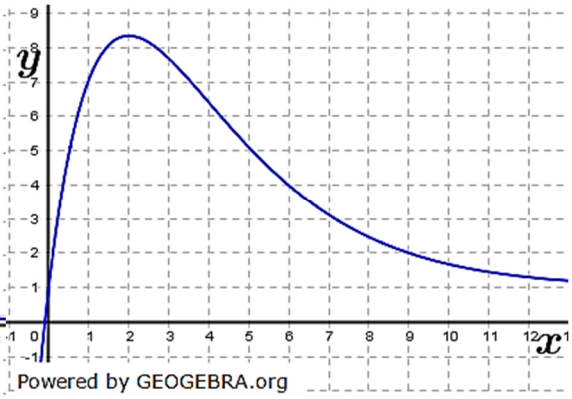
Lösungspräsentation
Siehe Video unter
https://www.fit-in-mathe-online.de/abituraufgaben-allgemeinbildendes-gymnasium/basisfach-analysis/musteraufgabe-m05#loesungspraesentation

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M11

Die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$ beschreibt für $x > 0$ modellhaft die Schneefallrate in einem Skigebiet (x in Stunden nach 6 Uhr, $f(x)$ in cm pro Stunde).
Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von f.





Fragen im AFB I

- Zuordnen des Graphen
- Ermitteln der Schneefallrate nach einer Stunde
- Bestimmen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit (graphisch)
- Ermitteln des Zeitpunkts, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch)

Fragen im AFB II

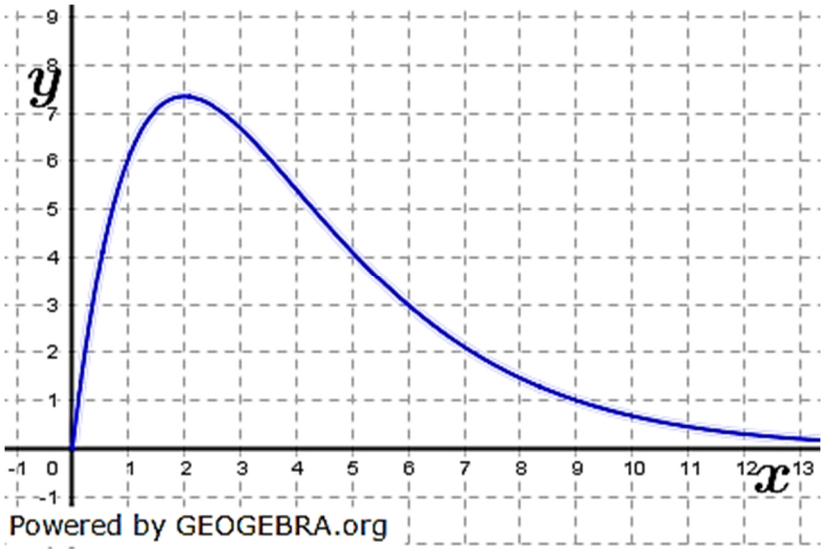
- Berechnen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit
- Ermitteln des Zuwachses an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

Fragen im AFB III

- Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt $x = 4$ an konstant ab. Erläutern, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien.
- Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von $2\,cm$ pro Stunde. Ermitteln der Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt.

Lösung M11

Lösungsvorbereitung:



Antworten im AFB I

- Zuordnen des Graphen:
  Abbildung 1 ist der Graph der Funktion. Der Graph der Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$ verläuft durch den Ursprung. Dies ist nur bei Abbildung 1 der Fall.

- Ermitteln der Schneefallrate nach einer Stunde
  Die Schneefallrate nach einer Stunde beträgt $6\ m/s$. Der Graph zeigt $f(1) = 6$.

- Bestimmen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit (graphisch)
  Am stärksten schneit es um 8 Uhr. Dort ist der Hochpunkt des Graphen von f.

- Ermitteln des Zeitpunkts, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch).
  Die Schneefallrate nimmt etwa um 14 Uhr am stärksten ab. Dort ist der Wendepunkt des Graphen von f mit negativer Steigung.

Antworten im AFB II

- Berechnen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit.
  Am Stärksten schneit es im Hochpunkt.
  Wir bilden die erste Ableitung nach der Produktregel:
  $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,5x} + 10x \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x}$
  $f'(x) = e^{-0,5x} \cdot (10 - 5x)$
  Wir setzen $f'(x)$ auf 0:
  $e^{-0,5x} \cdot (10 - 5x) = 0$
  Da $e^{-0,5x}$ nicht Null werden kann, gilt nach dem Satz vom Nullprodukt:
  $10 - 5x = 0$
  $5x = 10$
  $x = 2$
  2 Stunden nach Beobachtungsbeginnt – also um 8 Uhr – schneit es am stärksten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

- Ermitteln des Zuwachses an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

  Der Zuwachs der Schneehöhe entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall von 0 bis 5.
  Aus der Grafik lesen wir die Kästchen ab, es sind etwa 24 Kästchen. Die Fläche eines Kästchens entspricht $1\,cm$ Schnee / Stunde. Somit beträgt der Zuwachs der Schneehöhe etwa $24\,cm$ im Zeitraum von 5 Stunden.

<u>Antworten im AFB III</u>

- Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt $x = 4$ an konstant ab. Erläutern, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien.

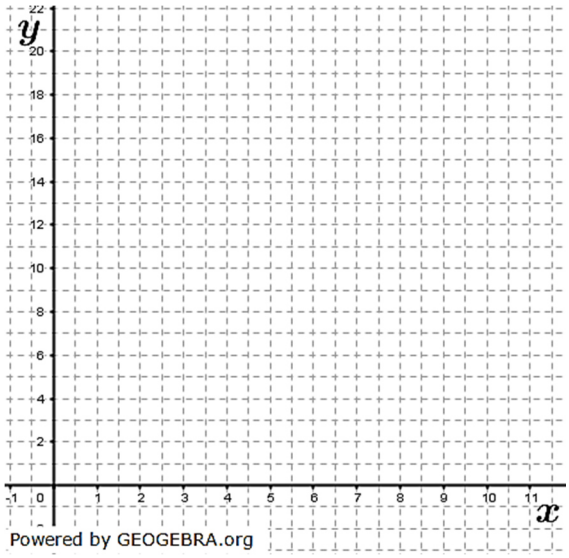
  Wir müssen die Steigung von f an der Stelle $x = 4$ ermitteln, also $f'(4)$. Diese Steigung wird zur Steigung einer Tangente durch den Punkt $P(4|f(4))$. Danach müssen wir die Nullstelle der Tangente bestimmen und erhalten dadurch den Zeitpunkt, zu dem es aufhört zu schneien.

- Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von $2\,cm$ pro Stunde. Ermitteln der Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt.

  Der Graph der Funktion ist ja eine Änderungsrate. Der Tauvorgang ist auch eine Änderungsrate. Die Schneehöhe nimmt also in dem Zeitraum zu, in dem die Änderungsrate Schneefall größer ist als die Änderungsrate Tauvorgang.
  Wir müssen somit $f(t)$ auf 2 setzen und die entstehende Gleichung nach x auflösen. Wir erhalten dadurch zwei Werte, der erte Wert ist der Zeitpunkt ab dem die Schneehöhe zunimmt, der zweite Wert der Zeitpunkt, ab dem die Schneehöhe wieder abnimmt.

Musteraufgabe M12

Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = -2t^2 + 12t$.
In dem Intervall, in welchem $f(t) \geq 0$ ist, beschreibt f die momentane Zuflussrate von Wasser in ein Becken (t in Stunden; $f(t)$ in Liter pro Stunde).
Zu Beginn enthält das Becken 20 Liter Wasser.



Aspekte im AFB I

- Ermitteln von Nullstellen, Extrempunkt des Graphen von f.
- Erstellen einer Skizze des Graphen von f.

Aspekte im AFB II

- Ermitteln des zugeflossenen Wasservolumens in der ersten Stunde.

Zusätzlich zum Zufluss konstanter Abfluss seit Beginn: 10 Liter pro Stunde

- Graphisches Bestimmen der Zeitpunkte des minimalen und maximalen Wasservolumens.
- Rechnerisches Bestimmen des Wasservolumens nach 3 Stunden.
- Beschreiben des Wasservolumens in Abhängigkeit von der Zeit.

Aspekte im AFB III

- Ab Zeitpunkt $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist.
  Erläutern der Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.

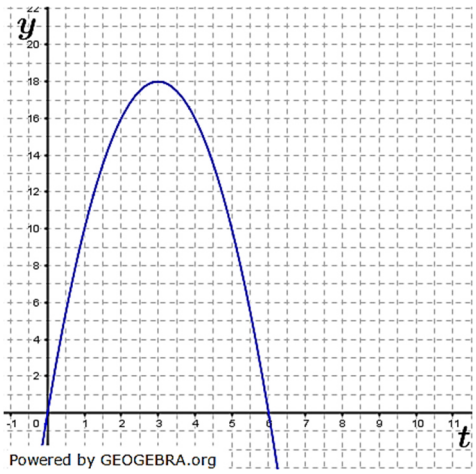
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M12

Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

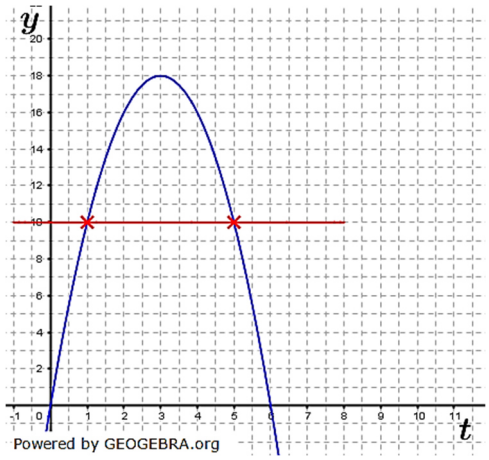
- Ermitteln Nullstellen und Extrempunkt eines Graphen:
  $f(t) = -2t^2 + 12t$
  Nullstellen mit $f(t) = 0$
  $-2t^2 + 12t = 0$
  $-2t \cdot (t - 6) = 0$
  $t_1 = 0$
  $t - 6 = 0$ ➔ $t_2 = 6$
  Extrempunkt mit $f'(t) = 0$:
  $f'(t) = -4t + 12$
  $-4t + 12 = 0$ ➔ $t = 3$
  y-Koordinate:
  $f(3) = -2 \cdot 9 + 12 \cdot 3 = 18$
- Skizze des Graphen:
  Siehe Grafik rechts.



Antworten im AFB II

- Ermitteln des zugeflossenen Wasservolumens in der ersten Stunde.
  Die Funktion ist gegeben als Zuflussrate. Die Menge in einem Zeitraum wird dann mittels Integral errechnet
  $\int_0^1 -2t^2 + 12t dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 6t^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 6 = \frac{16}{3}$
  In der ersten Stunde sind $\frac{16}{3}$ Liter Wasser zugeflossen.

- Graphisches Bestimmen der Zeitpunkte des minimalen und maximalen Wasservolumens unter der Voraussetzung eines konstanten Abflusses von 10 Liter pro Stunde.
  Das minimale Wasservolumen ist 1 Stunde nach Beobachtungsbeginn. Bis zu diesem Zeitpunkt fließt mehr Wasser ab (rote Linie) als zufließt.
  Das maximale Wasservolumen ist 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn, denn zwischen einer und 5 Stunden fließt mehr Wasser zu als ab.



- Rechnerisches Bestimmen des Wasservolumens nach 3 Stunden.
  Die Zu-, Abflussrate ist jetzt ja $f^*(t) = f(t) - 10$.
  Zufluss in den ersten 3 Stunden:
  $z = \int_0^3 (-2t^2 + 12t - 10)\, dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 - 10t\right]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 30 = 6$
  Bei einem Anfangsbestand von 20 Litern beträgt das Wasservolumen nach 3 Stunden 26 Liter.

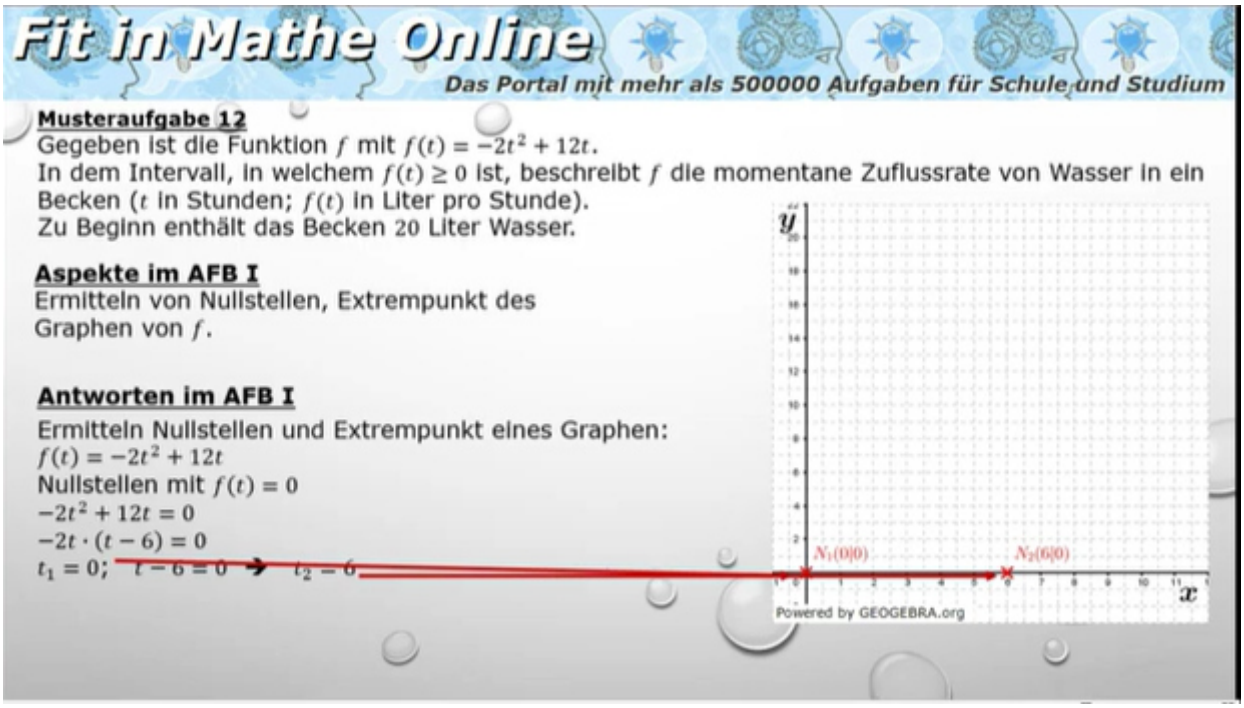
- Beschreiben des Wasservolumens in Abhängigkeit von der Zeit.
  Das Wasservolumen nimmt anfänglich ab, da die Abflussrate zunächst größer ist als die Zuflussrate. Das Wasser erreicht 1 Stunde nach Beobachtungsbeginn sein kleinstes Volumen. Danach nimmt das Volumen wieder zu, da die Zuflussrate nun größer ist als die Abflussrate. Zum Zeitpunkt 5 Stunden ist das maximale Wasservolumen erreicht, danach nimmt es wieder ab.

Antworten im AFB III

- Ab Zeitpunkt $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist.
  Erläuterung der Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.

  Für den Gesamtzufluss bzw. -abfluss in den ersten 4 Stunden gilt $z_4 = \int_0^4 (f(t) - 10)dt$. Ab der Stunde 4 gelte die neue Abflussrate a. Dann gilt für den Gesamtzufluss bzw. -abfluss von Stunde 4 bis Stunde 6:
  $z_6 = \int_4^6 (f(t) - a)dt$.
  Da anfänglich 20 Liter Wasser im Becken sind, gilt:
  $20 + z_4 + z_6 = 0$
  $\int_4^6 (f(t) - a)dt = -20 - \int_0^4 (f(t) - 10)dt$
  Die Auflösung der entstehenden Gleichung nach a gibt dann die neue konstante Abflussrate ab $t = 4$ an.

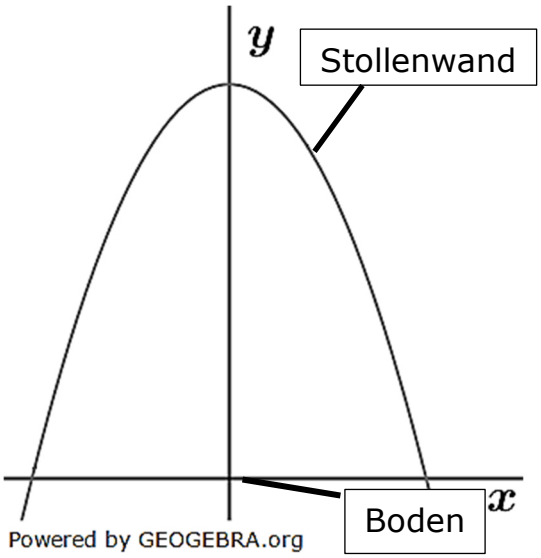
Lösungsvideo
https://youtu.be/p60jE4d2HwM



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M13

Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse (Boden) und den Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$, der oberhalb der x-Achse verläuft (Stollenwände).



Aspekte im AFB I

- Skalieren der Achsen, Erklären der Form des Graphen.
- Berechnen der Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen.
- Ermitteln der Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.

Aspekte im AFB II

- Schließen auf Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen.
- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und läuft voll mit Wasser.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.

Aspekte im AFB III

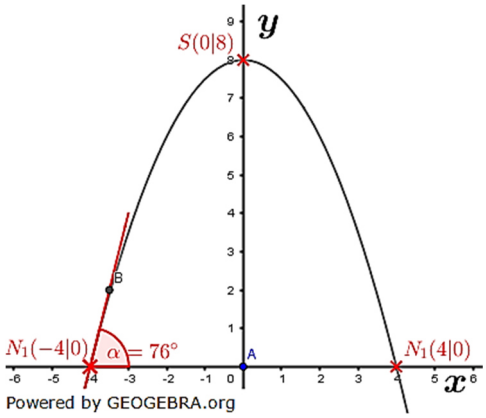
- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und es steht $3{,}5\,m$ hoch Wasser im Stollen.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.
- Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
  Ermitteln der maximal möglichen Breite des Behälters.

Lösung M12

Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Skalieren der Achsen, Erklären der Form des Graphen:
  Der Graph der Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel in $S(0|8)$.
  Zur Skalierung der -Achse berechnen wir zunächst die beiden Nullstellen über $f(x) = 0$.
  $-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0 \quad | \quad -\frac{1}{2}x^2; \cdot 23$
  $x^2 = 16 \quad | \quad \sqrt{}$
  $x_{1,2} = \pm 4$
  Damit können wir die Skalierung der Achsen vornehmen.



- Berechnung der Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen:
  Hierzu benötigen wir die Steigung in den Nullstellen.
  Steigungen ermitteln wir mit $f'(x)$. Wir leiten ab:
  $f'(x) = -x$
  $f'(-4) = 4$
  Die Tangente in $(-4|0)$ hat die Steigung 4. Dies ist der Tangens des mit der x-Achse gebildeten Winkels.
  $\alpha = arctan(4) = 75{,}96\,° \approx 76\,°$. Wegen der Achsensymmetrie des Graphen von f ist der Winkel bei $(4|0)$ ebenfalls etwa 76 °.
- Ermitteln der Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen:
  Steilste Stellen befinden sich in den Wendepunkten. Da eine Parabel keine Wendepunkte hat, die Parabel im Intervall $I = [-4|0]$ streng monoton fallend ist, liegen die steilsten Stellen in den Nullstellen.

Antworten im AFB II

- Schließen von Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen:
  Es gilt die NEW-Regel:

	NEW-Regel						
Differenzieren ↓	$F(x)$	N_{VZW}	E	W			↑
	$f(x)$		N_{VZW}	E	W		
	$f'(x)$			N_{VZW}	E	W	Integrieren

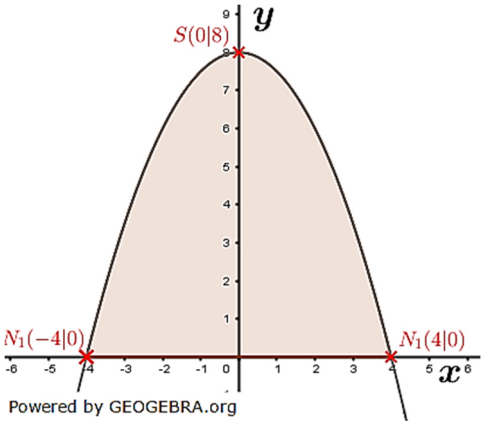
N_{VZW} = Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, E = Extremstelle, W = Wendestelle
$F(x)$=Stammfunktion, $f(x)$=1. Ableitung von F, $f'(x)$=2. Ableitung von F

Weiterhin gilt:

- Verläuft f oberhalb der x–Achse, so ist F streng monoton steigend.
- Verläuft f unterhalb der x–Achse, so ist F streng monoton fallend.
- Ist f' negativ, so ist F rechtsgekrümmt.
- Ist f' positiv, so ist F linksgekrümmt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und läuft voll mit Wasser.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.
  Das Volumen ist die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, multipliziert mit der Länge des Stollens.



$V = 50 \cdot \int_{-4}^{4} (-\frac{1}{2}x^2 + 8)\, dx$

$= 50 \cdot \left[-\frac{1}{6}x^3 + 8x\right]_{-4}^{4}$

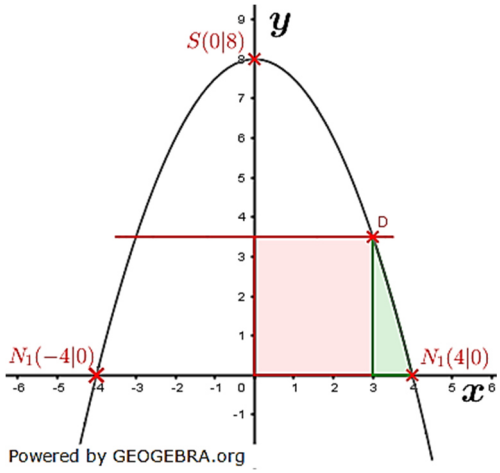
$= 50 \cdot (-\frac{1}{6} \cdot 64 + 8 \cdot (4) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-64) + 8 \cdot (-7)\right)$

$= 3333{,}33$

Das Wasservolumen im Stollen beträgt ca. $3333\,m^3$ Wasser.

<u>Antworten im AFB III</u>

- Der Bergstollen ist $50\,m$ lang und es steht $3{,}5\,m$ hoch Wasser im Stollen.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen.
  Das Wasservolumen ist nun die Fläche zwischen Wasserstandshöhe und dem Graphen von f multipliziert mit der Länge des Stollens.
  Aus Symmetriegründen betrachten wir nun lediglich die Situation zwischen $x_0 = 0$ und der rechten Nullstelle $x_1 = 4$.
  Wir benötigen zunächst den Schnittpunkt der Parallelen zur y-Achse im Abstand $3{,}5$ (Wasserhöhe) mit der Stollenwand.



$-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 3{,}5$

$\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5$

$x^2 = 9;\ \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 3$

Die mit 50 zu multiplizierende Fläche setzt sich nun zusammen aus dem (rot gekennzeichneten) Rechteck zuzüglich der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $I = \{3{,}4]$ (grün gekennzeichnet).

$V_{\frac{1}{2}} = 50 \cdot \left(3 \cdot 3{,}5 + \int_{3}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right) dx\right)$

$= 50 \cdot \left(10{,}5 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + 8x\right]_{3}^{4} dx\right)$

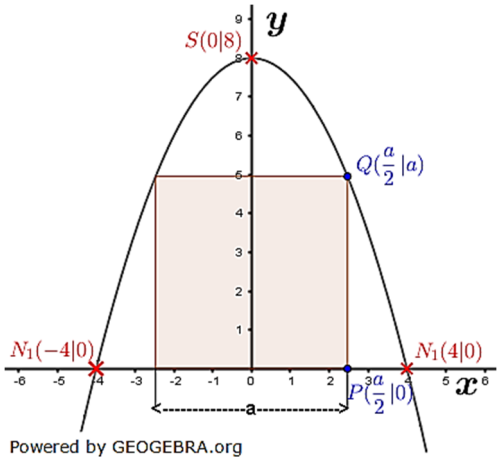
$= 50 \cdot \left(10{,}5 - \frac{64}{6} + 32 - \left(-\frac{27}{6} + 24\right)\right)$

$= 50 \cdot 12{,}33 = 616{,}67$

$V = 2 \cdot V_{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 616{,}67 = 1233{,}33$

Das Wasservolumen im Stollen beträgt etwa $1233\,m^3$.

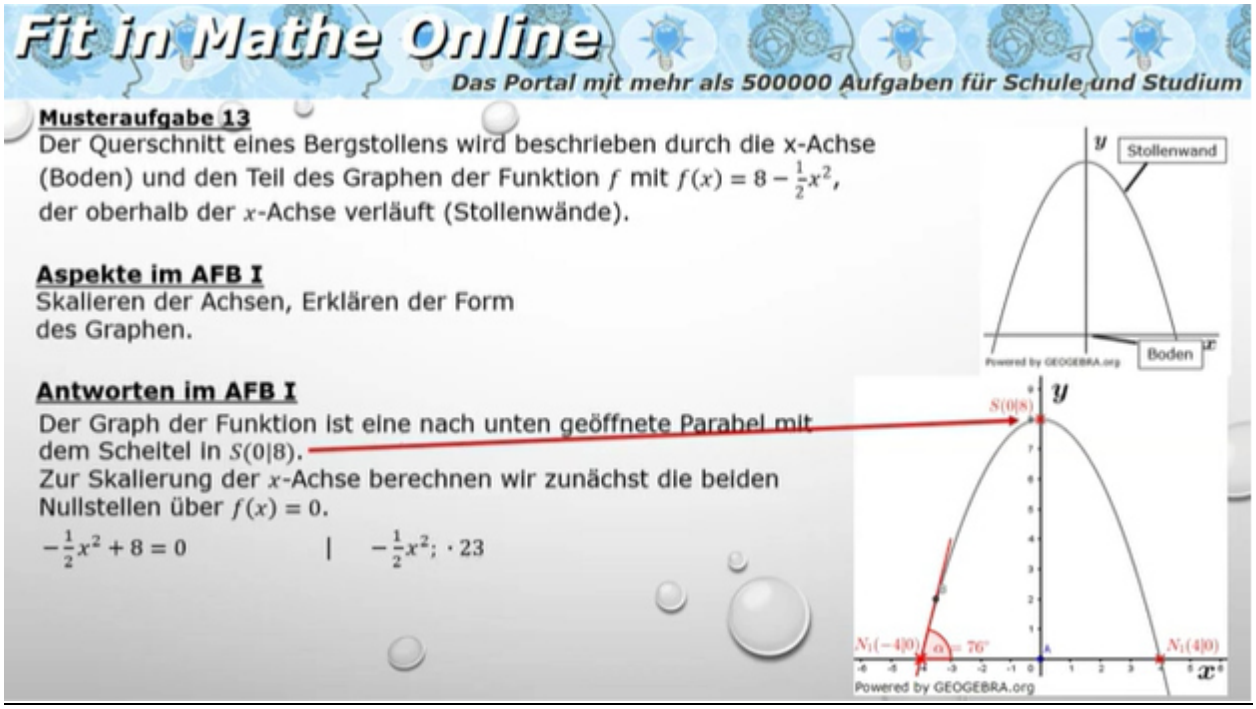
- Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
  Ermitteln der maximal möglichen Breite des Behälters.
  Die Grafik verdeutlicht die Situation.
  Die Strecke von der linken Ecke des Behälters bis zur rechten Ecke des Behälters sei a. Dann ist die Höhe des Behälters $f\left(\frac{a}{2}\right) = a$.
  Es muss also $f\left(\frac{a}{2}\right) = a$ sein, somit



$$a = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 8$$
$$\frac{1}{8}a^2 + a - 8 = 0$$
$$a^2 + 8a - 64 = 0$$
$$a_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 64} = -4 \pm \sqrt{80}$$
$$a = 4{,}94$$

Die maximal mögliche Breite des Behälters beträgt etwa $4{,}9\ m$.

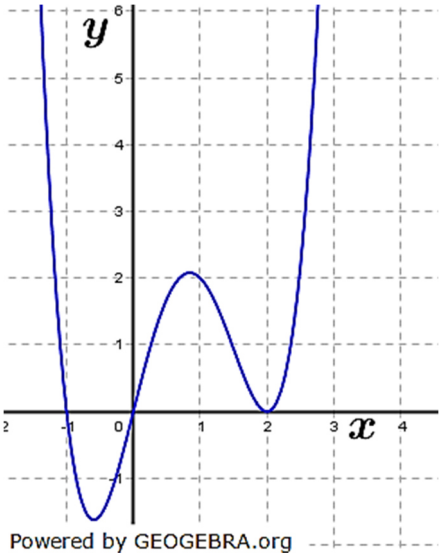
Lösungsvideo
https://youtu.be/II7AHq75Jkw



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M14

Gegeben ist ausschnittsweise der Graph der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.



Aspekte im AFB I

- Bestimmen von $f'(1)$.
- Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f.
- Ermitteln der Nullstellen von f'.

Aspekte im AFB II

- Erläutern der Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f.
- Untersuchung des Monotonieverhaltens von f.
- Bestimmen eines Näherungswertes für $f''(1)$ und Erläuterung der Bedeutung für den Graphen von f.
- Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f.
- Erstellen einer Skizze des Graphen von f mit Zusatzinformationen $f(0) = 0{,}6$ und $f(2) = 3$:
  - Ermitteln des Inhalts der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0; 2]$ mit der x-Achse einschließt.
- Begründen, ob $f(-1) < f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) > f(0)$.

Aspekte im AFB III

- Bestimmen des minimalen Grades einer Stammfunktion F von f.
- Ermitteln eines möglichen Funktionsterms von f'.

Lösung M14

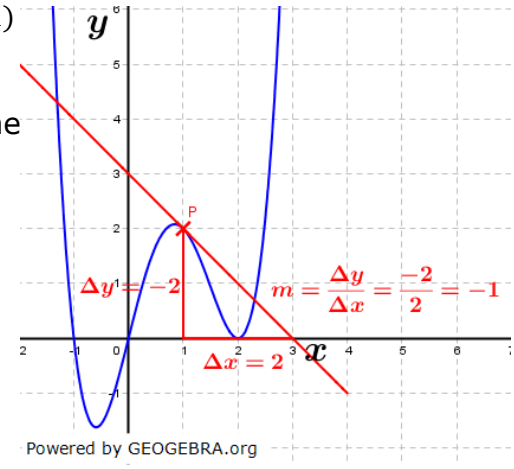
Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Bestimmen von $f'(1)$.
  Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab: $f'(1) = 2$.
- Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f.
  Der Graph von f besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung 2.
- Ermitteln der Nullstellen von f'.
  Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab: $x_1 = -1;\ x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ (doppelte Nullstelle).

Antworten im AFB II

- Erläutern der Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f.
  Die Nullstelle bei $x_1 = -1$ ist eine Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„. Der Graph von f hat bei $x_1 = -1$ einen Hochpunkt.
  Die Nullstelle bei $x_2 = 0$ ist eine Nullstelle mit VZW von „-" nach „+„. Der Graph von f hat bei $x_2 = 0$ einen Tiefpunkt.
  Die Nullstelle bei $x_3 = 2$ ist eine doppelte Nullstelle. Der Graph von f hat bei $x_3 = 2$ einen Sattelpunkt.
- Untersuchung des Monotonieverhaltens von f.
  In den Intervallen, in denen f' unterhalb der x-Achse verläuft, ist f monoton fallend. In den Intervallen, in denen f' oberhalb der x-Achse verläuft, ist f monoton steigend.
  Dies bedeutet:
  f ist monoton fallend im Intervall $I =]-1; 0[$
  f ist monoton steigend in $I =]-\infty; -1[\vee I =]0; \infty[$
- Bestimmen eines Näherungswertes für $f''(1)$ und Erläuterung der Bedeutung für den Graphen von f.
  f'' ist die Ableitung von f'. Wir zeichnen eine Tangente in $P(1|2)$ von f' und bestimmen ein Steigungsdreieck.
  Wir erhalten $f''(1) = -1$, das heißt, der Graph von ist an dieser Stelle rechtsdrehend (rechtsgekrümmt).

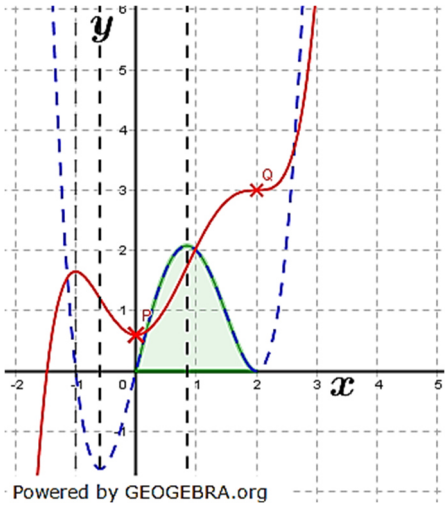


- Untersuchung des Krümmungsverhaltens von f.
  Ein Krümmungsverhalten wechselt in den Wendepunkten. Wendepunkte von f sind Extremstellen von f'. Damit ist
  f ist rechtsgekrümmt im Intervall $I =]-\infty; -0{,}5[\vee I =]0{,}8; 2[$, da f'' in diesen Intervallen negativ ist.
  f ist linksgekrümmt im Intervall $I =]-0{,}5; 0{,}8[\vee I =]2; \infty[$, da f'' in diesen Intervallen positiv ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

- Erstellen einer Skizze des Graphen von f mit Zusatzinformationen $f(0) = 0{,}6$ und $f(2) = 3$:
  - Ermitteln des Inhalts der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0; 2]$ mit der x-Achse einschließt.

  Zur Erstellung der Skizze gehen wir wie folgt vor:
  Wir ziehen eine Parallele zur y-Achse durch $x = -1$. Irgendwo auf dieser Linie liegt der Hochpunkt.
  Wir ziehen eine Parallele zur y-Achse durch $x = -0{,}6$. Irgendwo auf dieser Linie liegt ein Wendepunkt mit negativer Steigung.
  Wir ziehen eine Parallele zur y-Achse durch $x = 0{,}8$. Irgendwo auf dieser Linie liegt ein Wendepunkt mit positiver Steigung.
  Wir zeichnen den Punkt $P(0|0{,}6)$ ein, dort befindet sich der Tiefpunkt.
  Wir zeichnen den Punkt $Q(2|3)$ ein, dort befindet sich der Sattelpunkt.
  f hat von $-\infty$ bis $x = -1$ positive Steigung, somit kommt f aus dem III. Quadranten.
  Die Stammfunktion kann nun skizziert werden.



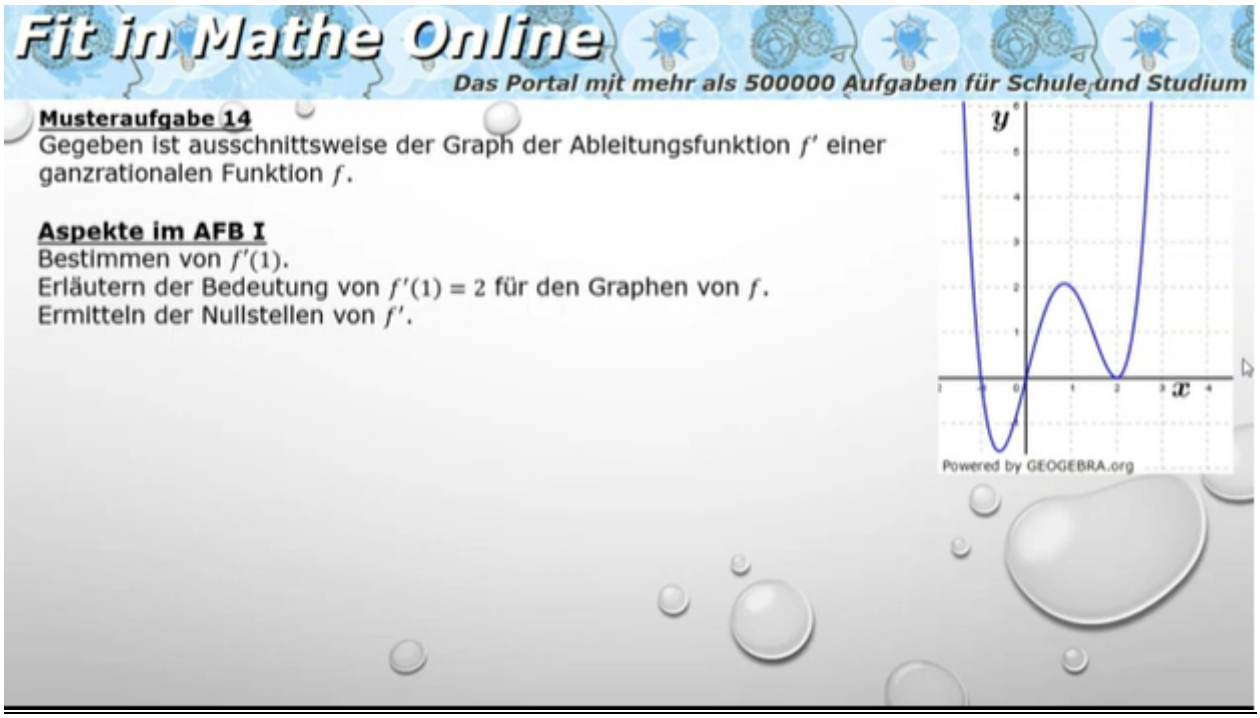
  Der Inhalt der Fläche ermittelt sich wie folgt:
  $A = \int_0^2 f'\,dx = [f(x)]_0^2 = f(2) - f(0)$.
  Sowohl $f(2)$ als auch $f(0)$ sind gegeben, somit
  $A = f(2) - f(0) = 3 - 0{,}6 = 2{,}4\,FE$.
  Die Fläche beträgt $2{,}4\,FE$.

- Begründen, ob $f(-1) < f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) > f(0)$.
  Da $f' < 0$ für $-1 \le x \le 0$ ist $f(-1) > f(0)$.

<u>Antworten im AFB III</u>

- Bestimmen des minimalen Grades einer Stammfunktion F von f.
  !!! ACHTUNG Glatteis !!!
  Gefragt ist nach F von f, abgebildet ist aber f'.
  f ist minimal vom Grad 5, da f' minimal vom Grad 4 ist. Somit ist F minimal vom Grad 6.
- Ermitteln eines möglichen Funktionsterms von f'.
  Der Graph von f' ist abgebildet. Er ist minimal vom Grad 4. Bekannt sind 2 einfache und eine doppelte Nullstelle, also insgesamt 4 Nullstellen. Somit können wir die Funktionsgleichung über die Nullstellenformel aufstellen und es gilt:
  $f'(x) = a \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-2)^2$
  Zur Berechnung von a lesen wir an der Grafik einen Punkt $S(1|2)$ ab und machen damit eine Punktprobe.
  $2 = a \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1-2)^2 = 2a \quad \Rightarrow a = 1$
  Die Funktionsgleichung lautet:
  $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2 = x^4 - 3x^3 + 4x$

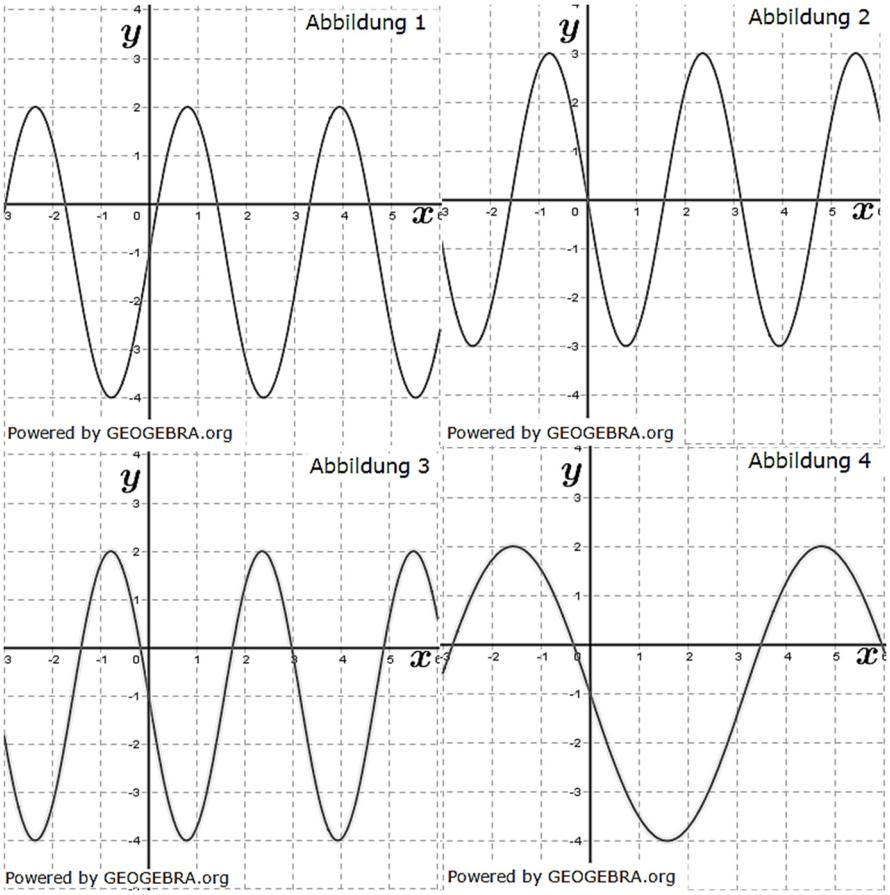
Lösungsvideo:
https://youtu.be/Buf8Sp2p6oU



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M15

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin(2x) - 1$ sowie vier Graphen.



Aspekte im AFB I

- Nennen von charakteristischen Eigenschaften des Graphen von f, die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.
- Zuordnen eines der vier Graphen zu f.

Aspekte im AFB II

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g, für die gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx = -3$. Bestimmen des Wertes von $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx$ ohne weitere Rechnung.
- Bestimmung einer Stammfunktion F von f.
- Untersuchen der Symmetrieeigenschaften des Graphen von f'.

Aspekte im AFB III

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g. Erläutern, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgeraden und des Graphen von g nicht gerade (z. B. 266) sein kann (Symmetrie)
- Herleiten von $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -2$, ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve.

Lösung M15

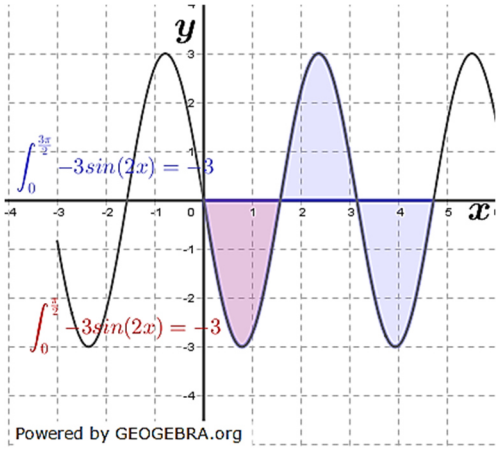
Lösungsvorbereitung:

Antworten im AFB I

- Nennen von charakteristischen Eigenschaften des Graphen von f, die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.
  Der Graph der Funktion ist
  1. in y-Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt;
  2. an der x-Achse gespiegelt;
  3. in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt sowie
  4. in y-Richtung um eine Einheit nach unten geschoben.
- Zuordnen eines der vier Graphen zu f.
  Abbildung 3 gehört zum Graphen von f, denn nur diese Abbildung entspricht den zuvor erwähnten Eigenschaften.

Antworten im AFB II

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g, für die gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx = -3$. Bestimmen des Wertes von $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx$ ohne weitere Rechnung.
  Der Wert ist $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx = -3$, denn die Funktion g hat die Periode π und die obere Grenze des 2. Integrals ist genau um π größer als die des 1. Integrals.



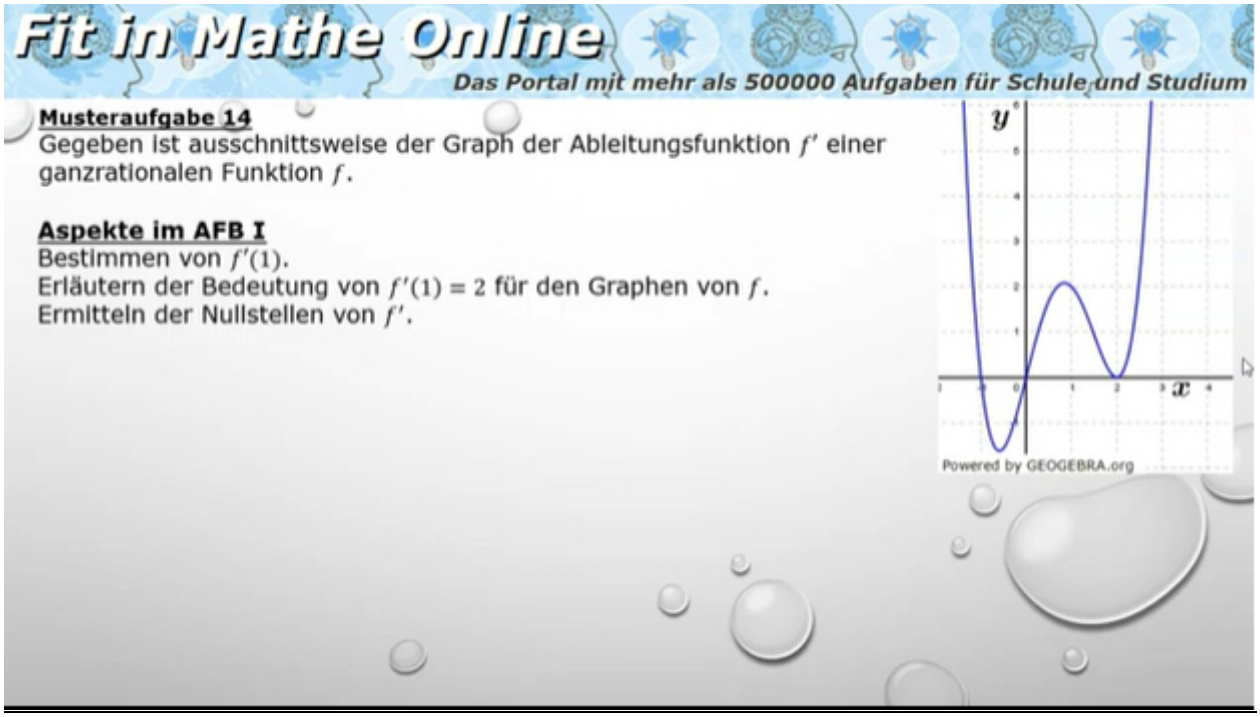
- Bestimmung einer Stammfunktion F von f.
  $F(x) = \int(-3 \cdot sin(2x) - 1)dx =$
  $-\frac{3}{2}cos(2x) + x + C$

- Untersuchen der Symmetrieeigenschaften des Graphen von f'.
  f' ist die Ableitung von f. Nach den Ableitungsregeln ergibt sich eine in x-Richtung unverschobene Kosinusfunktion. Eine solche Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Antworten im AFB III

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g. Erläutern, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgeraden und des Graphen von nicht gerade (z. B. 266) sein kann (Symmetrie)
  Sowohl die Funktion g als auch die Ursprungsgerade haben den Ursprung als Schnittpunkt. Steile Geraden, die nur im Ursprung schneiden, haben somit einen Schnittpunkt. Flachere Geraden, die g wieder schneiden haben rechts des Ursprungs UND links des Ursprungs eine oder zwei gemeinsame Punkte. Somit ergibt sich zusammen mit dem Ursprung stets eine ungerade Anzahl gemeinsamer Punkte.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

- Herleiten von $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -2$, ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve.
  Das Integral einer Summenfunktion lässt sich in Einzelintegrale aufteilen.
  $\int_{-1}^{1}(-3 \cdot sin(2x) - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} -3\sin(2x)\,dx - \int_{-1}^{1} 1\,dx$
  Wegen der Punktsymmetrie einer weder in x-Richtung noch in y-Richtung verschobenen Sinusfunktion ist $\int_{-1}^{1} -3\sin(2x)\,dx = 0$, sodass zur Berechnung des Summenintegrals lediglich das Teilintegral $\int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2$ Einfluss hat, also ist
  $\int_{-1}^{1}(-3 \cdot sin(2x) - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} -3\sin(2x)\,dx - \int_{-1}^{1} 1\,dx = 0 - 2 = -2.$

Lösungsvideo:
https://youtu.be/Buf8Sp2p6oU