Abituraufgaben Basisfach Analytische Geometrie Musteraufgabe 01

Lösung M01

Lösungsvorbereitung:

a) Lage Ebene – Gerade im $R3$:
Eine Gerade verläuft parallel zu einer Ebene:
Nachweis über Skalarprodukt aus Richtungsvektor von und Normalenvektor von muss null sein.
Eine Gerade verläuft in der Ebene:
Nachweis über Skalarprodukt aus Richtungsvektor von und Normalenvektor von muss null sein und zusätzlich muss der Aufpunkt der Geraden die Ebenengleichung erfüllen.
In allen anderen Fällen schneidet eine Gerade die Ebene in einem Punkt.
Nachweis keiner der zuvor genannten Kriterien ist tritt ein.

b) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E\colon x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$.

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

Prüfung, ob Aufpunkt von g die Ebenengleichung erfüllt:

$2 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2 \stackrel{?}{=} 1$

$-6 \neq 1$

Die Gerade g verläuft echt parallel zur Ebene E.

Gerade h:

Der Schnittpunkt von h mit g ist gleich dem Aufpunkt von g.
Gesucht wird noch der Richtungsvektor von h. Dieser muss senkrecht sowohl auf dem Normalenvektor von E als auch auf dem Richtungsvektor von g stehen.

$$k \cdot \overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\9\\3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

c) Wähle einen beliebigen Punkt der Ebene, z. B. $S(1|0|0)$. Einen Punkt S^* mit einem Abstand von $3 \cdot \sqrt{21}$ von der Ebene erreichen wir mit

$$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OS} + 3 \cdot \sqrt{21} \cdot \overrightarrow{n_{E_0}}$$

$$\overrightarrow{n_{E_0}} = \frac{\overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS^*} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \sqrt{21} \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\-12\end{pmatrix}$$

d) Geringster Abstand heißt stets senkrechter Abstand. So muss beispielsweise der Aufpunkt von g senkrecht auf dem Aufpunkt von j stehen, wobei der Aufpunkt von j in der Ebene E liegen muss.
Q sei der Aufpunkt von g, R der Aufpunkt von j.
Wir bilden eine Gerade k durch Q mit dem Normalenvektor der Ebene $\overrightarrow{n_E}$ als Richtungsvektor.

$$k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir schneiden die Gerade k mit der Ebene E und erhalten den Punkt R.

$k \cap E$

$x_1 = 2 + s;\quad x_2 = 2s;\quad x_3 = 2 - 4s$

$2 + s + 4s - 8 + 16s = 1$

$21s = 7$

$s = \frac{1}{3}$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Wir bilden die Geradengleichung von j aus dem Aufpunkt R und dem Richtungsvektor der Geraden g als Richtungsvektor von j.

$$j:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungspräsentation
Siehe Video unter