Musteraufgabe M02

Die Punkte $A(2|1|0)$ und $B(4|0|2)$ liegen auf der Geraden g.

a) Prüfen Sie, ob der Punkt $C(0|2|-2)$ auf der Geraden g liegt.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene $E\colon\ x_1 + 2x_2 = 4$ liegt.
Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Ebene, die ebenfalls die Gerade g enthält.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D, der auf der Geraden g liegt und vom Punkt A den Abstand 9 hat.

d) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten eines Punktes P bestimmen kann, der mit den beiden Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck bildet.

Lösung M02

Lösungsvorbereitung:

a) Gerade g durch A und B:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit $C(0|2|-2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der x_3-Koordinate folgt $t = -1$.

x_1-Koordinate: $2 - 2 = 0$

x_2-Koordinate: $1 + 1 = 2$

Der Punkt $C(0|2|-2)$ liegt auf g.

b) Prüfung, ob $g \in E$:

Zunächst Prüfung auf Parallelität:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$g \parallel E$

$\overrightarrow{OA} \in E$:

$2 + 2 = 4$

$4 = 4$

g verläuft in E.

Weitere Ebene, die ebenfalls g enthält:

$F:\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

c) $$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \ \overrightarrow{v_0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}=|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \pm \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 1-3 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix};\ \ \overrightarrow{OD_2} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 1+3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

d) Gesucht ist der Punkt C, sodass $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ ist.

Wir bilden den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Wir bilden einen Vektor $\overrightarrow{MC}$, der senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht.

Weir bilden die Gerade h mit dem Mittelpunkt M als Aufpunkt und $\overrightarrow{MC}$ als Richtungsvektor.

$h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{MC}$

Wir bestimmen den Punkt C auf h, sodass $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| = 3$ ist.

Lösungspräsentation

Siehe Video unter