Musteraufgabe M04

Gegeben sind die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$E\colon 2x_1 - x_3 = 6$$

a) Begründen Sie, dass sich g und E schneiden und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von g und E.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von g und E.

c) Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Erläutern Sie ein Verfahren, wie man die Gleichung der Spiegelgeraden g^* erhalten kann.

d) Die Gerade h ist parallel zu E und schneidet gleichzeitig die Gerade g orthogonal. Beschrieben Sie eine Verfahren, wie man die Gleichung von h bestimmen kann.

Lösung M04

Lösungsvorbereitung:

a) Begründung:
Das Skalarprodukt aus Richtungsvektor von g und Normalenvektor von E ist nicht null.
Schnittpunkt:
$g \cap E$
$x_1 = 2 + t; \quad x_3 = 2$
$E: \quad 2 \cdot (2 + t) - 2 = 6$
$4 + 2t - 2 = 6$
$t = 2$
$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(4|1|2)$.

b) Schnittwinkel Gerade – Ebene:
$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$
$\alpha = arcsin\left(\frac{2}{5}\right) = 23{,}58\,°$

c) Spiegelgerade g^*:
Wähle beliebigen Punkt auf g, der nicht der Schnittpunkt ist, z. B. den Aufpunkt $P(2|-3|2)$.
Bilde Gerade h durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.
Schneide h mit E und bestimme Schnittpunkt Q.
Ermittle Spiegelpunkt P^* mit $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$
Bilde g^* mit g^*: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SP^*}$

d) Gleichung einer Geraden h orthogonal zu g und E:
Der Richtungsvektor von h muss senkrecht auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_g}$ von g und dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ von E stehen.
Wir bilden diesen Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$ über das Kreuzprodukt
$k \cdot \overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E}$
Gerade h aufstellen durch den Aufpunkt von g und dem gerade ermittelten Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$.

Lösungspräsentation
Siehe Video unter