Musteraufgabe M01

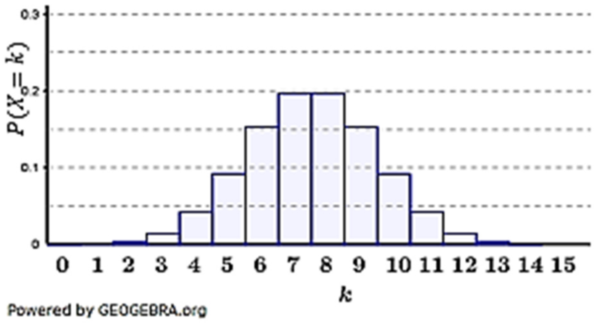
In einer Urne befinden sich sechs blaue und vier weiße Kugeln. Betrachtet wird das Zufallsexperiment, bei dem aus der Urne mehrmals nacheinander eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird.

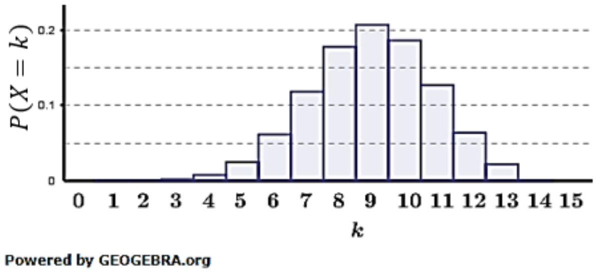
a) Das Zufallsexperiment wird dreimal nacheinander durchgeführt. Geben Sie für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse jeweils einen Term an:
   A: „Alle Kugeln sind blau."
   B: „Genau zwei der gezogenen Kugeln sind blau."

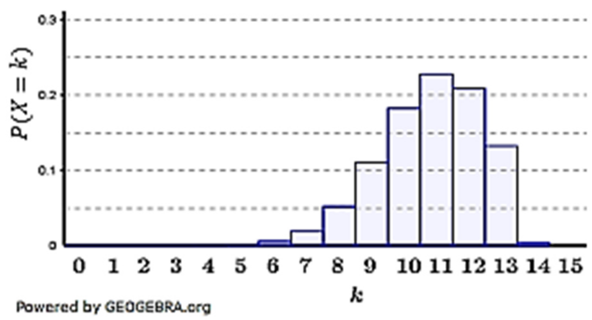
Das Zufallsexperiment wird nun 15 Mal nacheinander durchgeführt. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der dabei gezogenen blauen Kugeln an.

b) Begründen Sie, dass Y binomialverteilt ist.
   Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y und erläutern Sie dessen Bedeutung für das durchgeführte Zufallsexperiment.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 5 und höchstens 10 blaue Kugel gezogen werden.

c) Die nebenstehenden Histogramme stellen die Binomialverteilungen von Zufallsgrößen bei 15-maliger Durchführung des entsprechenden Bernoulli-Experiments dar.
   Untersuchen Sie, welches der Diagramme die Verteilung von Y darstellt.
   Untersuchen Sie für die beiden anderen Diagramme, welche Aussagen jeweils über die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit möglich sind.







Lösung M01

Lösungsvorbereitung:

a) $P(A) = P(X = 3) = 0{,}6^3 = 0{,}216$
$P(B) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432$

b) Begründung
Das Zufallsexperiment stellt eine Bernoulli-Kette der Länge 15 dar: Die 15 Ergebnisse sind wegen des Zurücklegens unabhängig voneinander und es gibt bei jedem Zug nur zwei mögliche Ergebnisse.

Erwartungswert und Bedeutung
$E(Y) = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}6 = 9$.
Führt man die Bernoulli-Kette sehr oft durch, so werden auf lange Sicht im Mittel 9 von 15 gezogenen Kugeln blau sein.

Wahrscheinlichkeit
$P(5 \le Y \le 10) = P(Y \le 10) - P(Y \le 4) \approx 0{,}773$

c) $E(Y) = 9$.
Der höchste Balken des Diagramms muss bei $k = 9$ liegen. Also zeigt (2) die Verteilung von $= Y$.

Trefferwahrscheinlichkeiten
(1) Da das Diagramm achsensymmetrisch ist, ist $p = 0{,}5$.
(2) Das Diagramm zeigt $\mu = 11$. Somit gilt $n \cdot p = 11$. ➔ $p = \frac{11}{15}$.

Lösungspräsentation
Siehe Video unter