Musteraufgabe M05

Für eine statistische Untersuchung wurden an einem bestimmten Tag an zwei Schulen getrennt voneinander Daten erhoben. Dabei wurden jeweils für die Schüler der beiden Schulen folgende Merkmale untersucht:

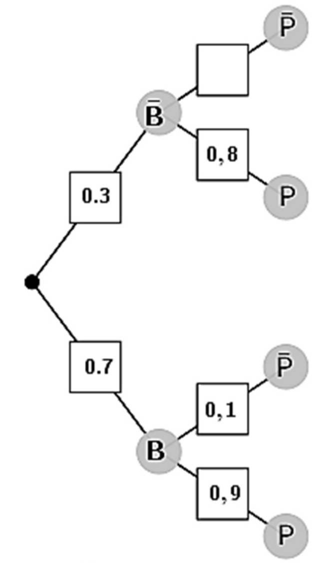
- Schüler kam mit dem Bus zur Schule (B: mit Bus; $\overline{B}$: nicht mit Bus).
- Schüler kam pünktlich zum Unterricht (P: pünktlich; $\overline{P}$: nicht pünktlich).

Die Ergebnisse sind für Schule 1 in absoluten Zahlen gegeben und für Schule 2 in Form eines Baumdiagramms.

Schule 1:

Von den 1000 Schülern der Schule kamen 600 Schüler mit dem Bus, wovon 510 pünktlich waren.
Von den Schülern, die nicht mit dem Bus kamen, waren 340 pünktlich.

Schule 2:



Die folgenden Aufgabenstellungen beziehen sich auf den Tag der Untersuchung für zufällig ausgewählte Schüler der jeweiligen Schule.

a) Bestimmen Sie für einen Schüler der Schule 1 die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
E: „Der Schüler kam mit dem Bus und wahr pünktlich."
F: „Der Schüler kam pünktlich."
G: „Der Schüler kam weder mit dem Bus, noch war er pünktlich."

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E, F und G aus Teilaufgabe a) für einen Schüler von Schule 2.

c) Von Schule 1 werden 10 Schüler zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele Schüler mit dem Bus kamen.
Man geht von folgender Annahme aus: X ist binomialverteilt.
Begründen Sie, dass diese Annahme nur näherungsweise gilt.
Berechnen Sie unter Verwendung dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens die Hälfte der ausgewählten Schüler mit dem Bus kam.

d) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für Schule 2, bei dem in der Verzweigung der ersten Stufe zwischen pünktlich (P) und nicht pünktlich ($\overline{P}$) unterschieden wird und in der Verzweigung der zweiten Stufe zwischen Bus (B) und nicht Bus ($\overline{B}$).
Ermitteln Sie alle Wahrscheinlichkeiten, die an den Ästen stehen.

Lösung M05

Lösungsvorbereitung:

a) Wahrscheinlichkeiten für Schule 1:

Wir stellen zunächst die relativen Häufigkeiten aus den absoluten Häufigkeiten auf. Es gilt ja:

$P(B) = \frac{600}{1000} = 0{,}6; \quad P(\overline{B}) = \frac{400}{1000} = 0{,}4$

$P(B \cap P) = \frac{510}{1000} = 0{,}51; \quad P(B \cap \overline{P}) = \frac{90}{1000} = 0{,}09$

$P(\overline{B} \cap P) = \frac{340}{1000} = 0{,}34; \quad P(\overline{B} \cap \overline{P}) = \frac{60}{1000} = 0{,}06$

Damit können die Wahrscheinlichkeiten aufgestellt werden:

$P(E) = P(B \cap P) = 0{,}51$

$P(F) = P(B \cap P) + P(\overline{B} \cap P) = 0{,}51 + 0{,}34 = 0{,}85$

$P(G) = P(\overline{B} \cap \overline{P}) = 0{,}06$

b) Wahrscheinlichkeiten für Schule 1:

Wir lesen die relativen Häufigkeiten aus dem Baumdiagramm ab:

$P(B) = 0{,}7; \quad P(\overline{B}) = 0{,}3$

$P(B \cap P) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63; \quad P(B \cap \overline{P}) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$

$P(\overline{B} \cap P) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24; \quad P(\overline{B} \cap \overline{P}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

Damit können die Wahrscheinlichkeiten aufgestellt werden:

$P(E) = P(B \cap P) = 0{,}63$

$P(F) = P(B \cap P) + P(\overline{B} \cap P) = 0{,}63 + 0{,}24 = 0{,}87$

$P(G) = P(\overline{B} \cap \overline{P}) = 0{,}06$

c) Begründung einer Annahme

Die Annahme einer Binomialverteilung gilt nur näherungsweise, da es sich hier vom Prinzip um Ziehen ohne Zurücklegen handelt. Ist z. B. der erste gewählte Schüler ein Schüler, der mit dem Bus gekommen ist, so ist seine Wahrscheinlichkeit $\frac{600}{1000}$. Für den zweiten ausgewählten Schüler als Busschüler beträgt sie dann nur noch $\frac{599}{999} = 0{,}599$ bzw. – falls der erste Schüler kein Busschüler war $\frac{600}{999} = 0{,}601$. Die Differenz zu $0{,}6$ liegt in allen Fällen jedoch unter $1\,\%$. Somit kann X näherungsweise binomialverteilt betrachtet werden.

Wahrscheinlichkeit für mindestens 10 Busschüler

$P(Mind.\,10\,Busschüler) = B_{10;0,6}(X \geq 5) = 1 - B_{10;0,6}(X \leq 4) = 0{,}838$

d) Baumdiagramm für Schule 2:

$P(P \cap B) = 0{,}87 \cdot x = 0{,}63$

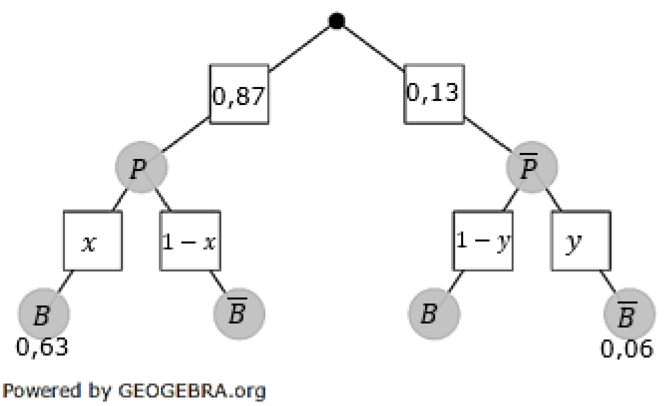
$x = 0{,}724; \;\; 1 - x = 0{,}276$

$P(P \cap \overline{B}) = 0{,}87 \cdot 0{,}276 = 0{,}24$

$P(\overline{P} \cap \overline{B}) = 0{,}13 \cdot y = 0{,}06$

$y = 0{,}462; \;\; 1 - y = 0{,}538$

$P(\overline{P} \cap B) = 0{,}13 \cdot 0{,}538 = 0{,}07$



Lösungspräsentation
Siehe Video unter