Lösung Aufgabensatz 1/21 A1

$f(x) = e^{-2x+1} + 1$

a) Nachweis der Steigung -2 der Tangente in $x_0 = \frac{1}{2}$.

Wir benötigen hierzu $f'(x)$:

$f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{-2\cdot\frac{1}{2}+1} = -2 \cdot e^0 = -2$

b) Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

Wir benötigen die Tangentengleichung:

$t(x) = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2;\; f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2\cdot\frac{1}{2}+1} + 1 = 2$

$t(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$

$t(x) = -2x + 3$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

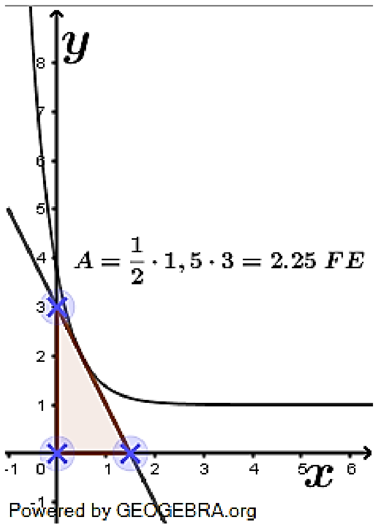
$t(x) = 0 = -2x + 3$ ➔ $x = 1{,}5$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$t(0) = 3$

Fläche des Dreiecks:

$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 2{,}25\ FE$



Lösung Aufgabensatz 1/21 A2

f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden $g\colon\ y = 2$ und $h\colon\ y = 5$.

Der Flächeninhalt berechnet sich über das Integral zwischen oberer Kurve h und unterer Kurve f (blaugekennzeichnete Fläche). Darin ist jedoch die Fläche enthalten zwischen oberer Kurve g und unterer Kurve f (rot schraffierte Fläche), sodass diese wieder abgezogen werden muss.

Wir benötigen zunächst die Schnittpunkte von h und f sowie von g und f:

$f \cap h$:

$1 + x^2 = 5$	|	-1
$x^2 = 4$	|	$\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 2$		

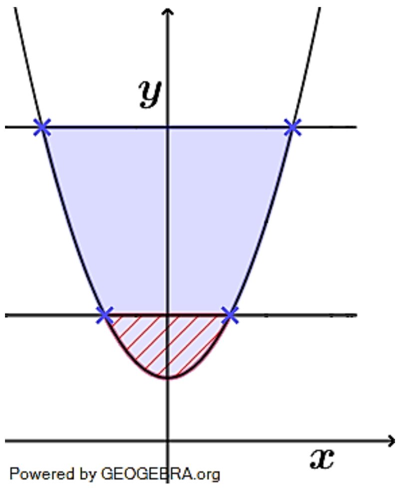
$f \cap g$:

$1 + x^2 = 2$	|	-1
$x^2 = 1$	|	$\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 1$		

$A = 2 \cdot (\int_0^2 (h - f(x))dx - \int_0^1 (g - f(x))dx)$

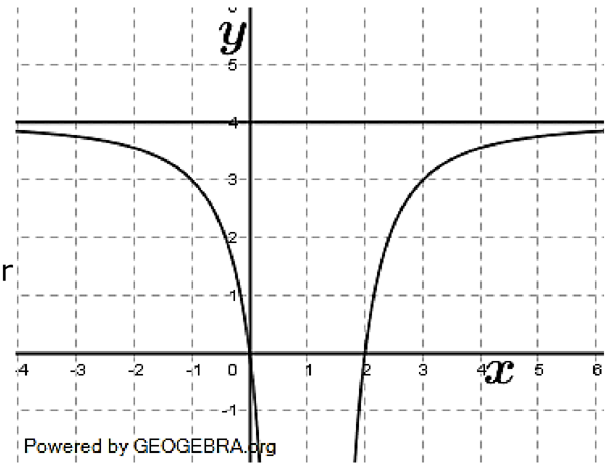
$A = 2 \cdot (\int_0^2 (4 - x^2)\,dx - \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 2 \cdot \left(\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 - \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right)$

$A = 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = 2 \cdot \left(7 - \frac{7}{3}\right) = \frac{28}{3}\ FE$



Lösung Aufgabensatz 1/21 A3

$f(x) = a + \frac{b}{x^2+c}$ und $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$.

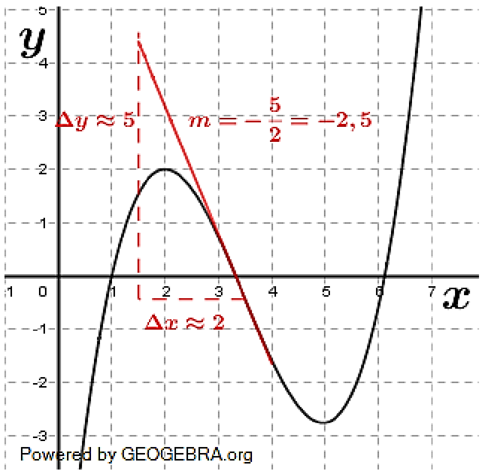


a) Begründung, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann:
Für f ergeben sich wegen $x^2 + c$ im Nenner zwei Pole für $x = \pm c \ \wedge c < 0$.
Für $c > 0$ existiert kein Pol.
Der dargestellte Graph hat jedoch nur eine senkrechte Asymptote $x = 1$.

b) Bestimmung von a, b und c für g:
Aus a) folgt bereits $c = -1$.
Wegen der waagrechten Asymptote $y = 4$ ist $a = 4$.
Mit einer Punktprobe mit $g(0) = 0$ erhalten wir:
$4 + \frac{b}{(0-1)^2} = 0$
$4 + b = 0$
$b = -4$
$g(x) = 4 - \frac{4}{(x-1)^2}$

Lösung Aufgabensatz 1/21 A4

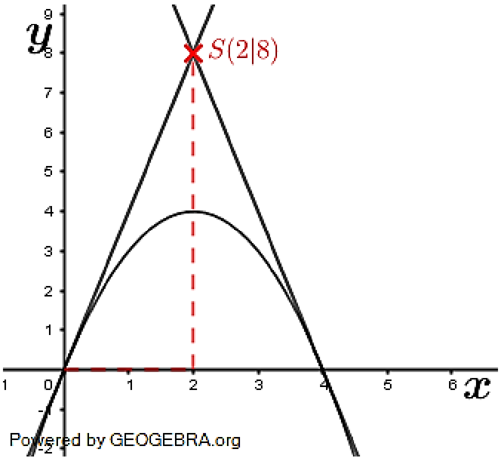
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = f(x) + 5x$.



(1) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall $[0,5; 4]$ genau ein lokales Maximum.
Die Aussage ist richtig. f hat bei $x = 1$ eine Nullstelle mit VZW von „-„ nach „+“; somit hat F in $x = 1$ ein Minimum. f hat bei $x \approx 3,3$ eine Nullstelle mit VZW von „+„ nach „-“; somit hat F in $x = 3,3$ ein Maximum. F ist mindestens vom Grad 4 und für $x \to |\infty|$ verläuft $F \to \infty$. Damit ist das Maximum ein lokales Maximum.

(2) Die Funktion g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.
Die Aussage ist richtig, wenn $g'(x)$ im Intervall $[1; 6]$ größer 0 ist.
f hat einen Wendepunkt mit (stärkster) negativer Steigung bei $x = 3,5$. Wir legen eine Tangente an den Graphen von f und bestimmen die dortige Steigung mit etwa $-2,5$ (siehe Grafik).
Wir bilden $g'(3,5) = -2,5 + 5 = 2,5$. Somit ist g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.

Lösung Aufgabensatz 2/21 A1



$f(x) = 4x - x^2$.

a) Wir berechnen $f'(0)$:

$f'(x) = 4 - 2x$

$f'(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$ **q.e.d.**

b) Wir bilden zunächst die Tangentengleichung an f in $x = 0$.

$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$t(x) = 4x$

Da f eine achsensymmetrische Parabel zur Achse $x = 2$ ist, hat der Schnittpunkt die x-Kooridnate 2.

$t(2) = 4 \cdot 2 = 8$

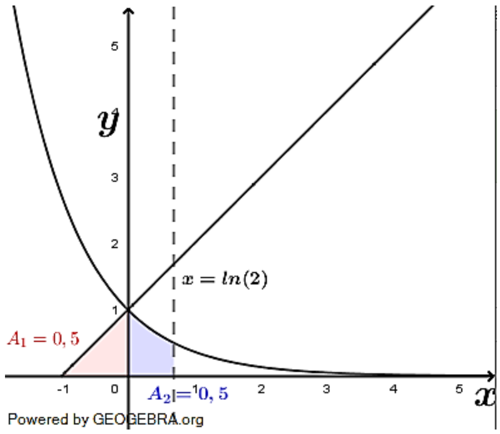
$S(2|8)$

Abstand Punkt vom Ursprung mit dem Satz des Pythagoras:

$d(O;S) = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

Der Punkt hat einen Abstand von $\sqrt{68}$ vom Ursprung.

Lösung Aufgabensatz 2/21 A2



$f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$

Berechnung der Teilfläche A_1:

Die Teilfläche A_1 ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten-Längen 1.

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5\, FE$

Berechnung der Teilfläche A_2:

Die Teilfläche A_2 berechnet sich über das Integral unter f.

$A_2 = \int_0^u e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^u = -e^{-u} + 1$

$A_1 = A_2$

$-e^{-u} + 1 = 0{,}5$

$e^{-u} = 0{,}5 \quad | \quad ln$

$-u = ln\,(0{,}5)$

$u = -\,ln(0{,}5) = ln\,(2)$

$A_2 = -e^{-\,ln(2)} + 1 = -\frac{1}{e^{ln(2)}} = -\frac{1}{2} + 1 = 0{,}5$

Gesamtfläche:

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1\, FE$

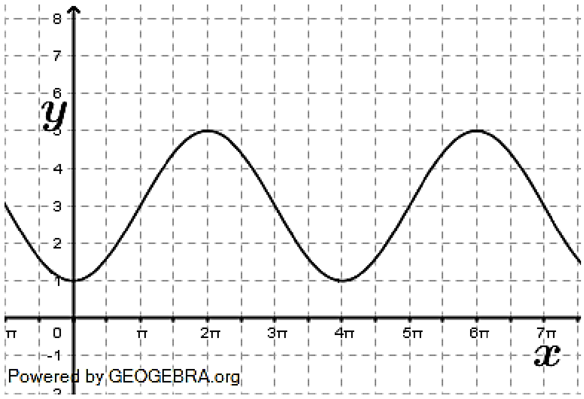
Lösung Aufgabensatz 2/21 A3

<u>Lösung 1:</u>

$f_1(x) = a \cdot \cos\big(b(x-c)\big) + d$

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$



Die Kosinuskurve ist in x-Richtung nicht verschoben: ➔ $c = 0$

Die Kosinuskurve ist an der x-Achse gespiegelt: ➔ $a = -2$

Die Periode ist $p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 6\pi - 2\pi = 4\pi$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$f_1(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$

<u>Lösung 2:</u>

$f_2(x) = a \cdot sin\big(b(x-c)\big) + d$

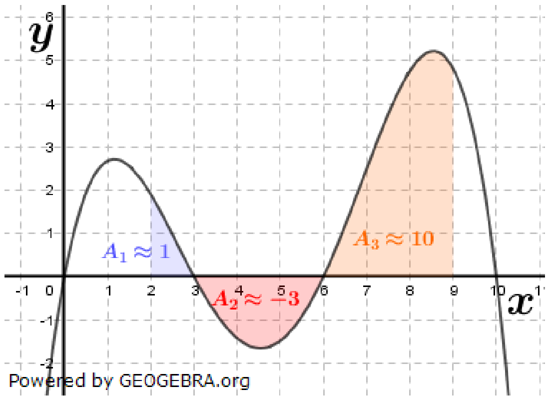
a, b und d wie bei Lösung 1.

Die Sinuskurve ist in x-Richtung um π Einheiten nach rechts verschoben, somit $c = \pi$.

$f_2(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right) + 3$

Lösung Aufgabensatz 2/21 A4

a) Begründung f' im Intervall $[5;8]$ nicht monoton:
f besitzt im Intervall einen Wendepunkt mit positiver Steigung, der in der ersten Ableitung zu einem Hochpunkt wird.



b) Nullstellen von $I_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt; 2 \leq x \leq 9$:
Die erste Nullstelle liegt bei $x = 2$ (untere Grenze der Integralfunktion) mit der Steigung $m = 2$.
Nun müssen wir Kästchen zählen, da eine Funktionsgleichung nicht gegeben ist.

$\int_2^2 f(t)\,dt \approx 1$

$\int_3^6 f(t)\,dt \approx -3$

$\int_6^9 f(t)\,dt \approx 10$

$\int_2^6 f(t)\,dt \approx 1 - 3 = -2$

Damit gibt es im Intervall $[2;6]$ eine Stelle x_1 mit $\int_2^{x_1} f(t)\,dt = 0$

$\int_3^9 f(t)\,dt \approx -3 + 10 = 7$

Damit gibt es im Intervall $[6;9]$ eine Stelle x_2 mit $\int_3^{x_2} f(t)\,dt = 0$

Die Integralfunktion hat in $2 \leq x \leq 9$ insgesamt 3 Nullstellen.