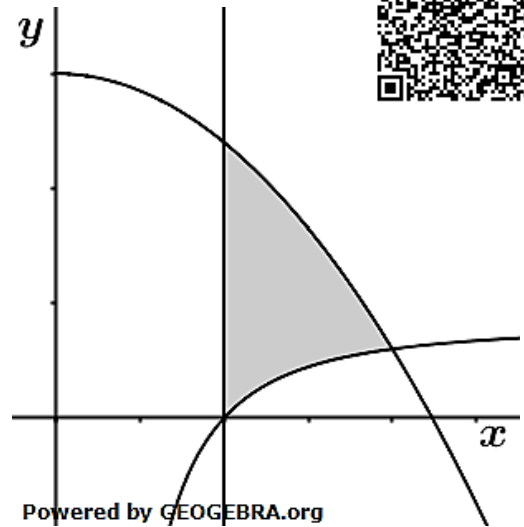


### Aufgabensatz 1/22 A1

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen  $f$  mit  $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$  und  $g$  mit  $g(x) = 15 - 3x^2$ ;  $x > 0$ , sowie die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$ .

- Zeigen Sie, dass sich die Graphen von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0 = 2$  schneiden.
- Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

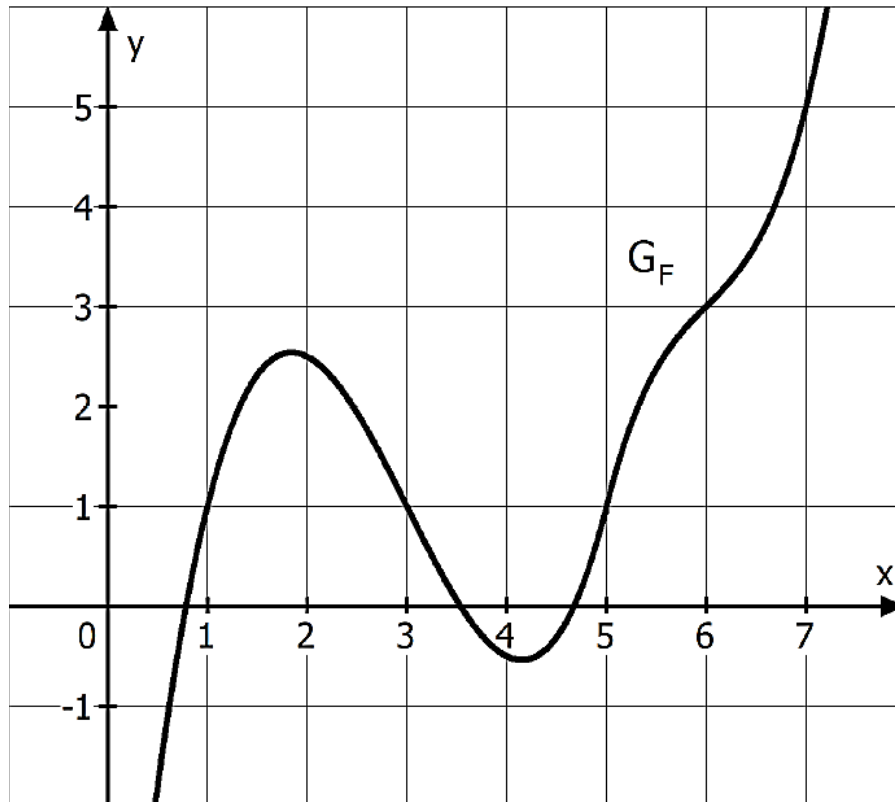
(Quelle Abitur BW 2022)



### Aufgabensatz 1/22 A2

Betrachtet werden die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f$  und  $F$ , wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Die Abbildung zeigt den Graphen  $G_F$  von  $F$ .

- Bestimmen Sie den Wert des Integrals  $\int_1^7 f(x) dx$ .
- Bestimmen Sie den Funktionswert von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 1$ . Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung.



(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 1/22 A3

Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten ganzrationalen Funktionen  $f_k$  mit  $f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - kx^2$  mit  $k \in \mathbb{R}$ .

- Begründen Sie, dass der Graph von  $f_2$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse ist.
- Es gibt einen Wert von  $k$ , für den  $x_w = 1$  eine Wendestelle von  $f_k$  ist. Berechnen Sie diesen Wert von  $k$ .

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 1/22 A4

Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen quadratischen Funktion  $g$ , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- Der Graph von  $g$  schneidet die Gerade mit der Gleichung  $y = \frac{1}{4}x + 1$  im Punkt  $P(0|1)$  unter einem rechten Winkel.
- Die  $x$ - und die  $y$ -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von  $g$  stimmen überein.

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A1

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{0,5x^2}$ .

Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .

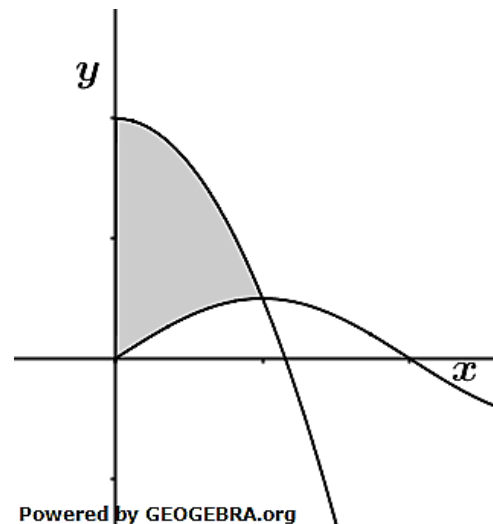
(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A2

Abgebildet sind die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = 4 - 3x^2$  und  $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .

- Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an der Stelle  $x_0 = 1$  schneiden.
- Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

(Quelle Abitur BW 2022)



### Aufgabensatz 2/22 A3

Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  besitzt den Tiefpunkt  $T(1|-2)$ . Der Graph der Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$  entsteht, indem  $G_f$  um  $a$  Einheiten nach rechts und um  $b$  Einheiten nach unten verschoben wird. Bestimmen Sie die Werte von  $a$  und  $b$ .

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A4

Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen dritten Grades berühren die  $x$ -Achse im Punkt  $O(0|0)$ . Jeder Graph der Schar besitzt die Extremstelle  $x_0 = -2$ . Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar den Punkt  $P(-3|0)$  gemeinsam haben.

(Quelle Abitur BW 2022)

### Lösung Aufgabensatz 1/22 A1

$$f(x) = 4 - \frac{4}{x^2} \text{ und}$$

$$g(x) = 15 - 3x^2; \quad x > 0$$

- a) Nachweis eines Schnittpunktes in  $x_0 = 2$ .  
Dies ist der Fall, wenn  $f(2) =$

$$f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3.$$

$$g(2) = 15 - 3 \cdot 2^2 = 3$$

- b) Die markierte Fläche ist die Fläche zwischen oberer Kurve  $g$  und unterer Kurve  $f$  im Intervall  $I = [1; 2]$ .

$$A = \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx$$

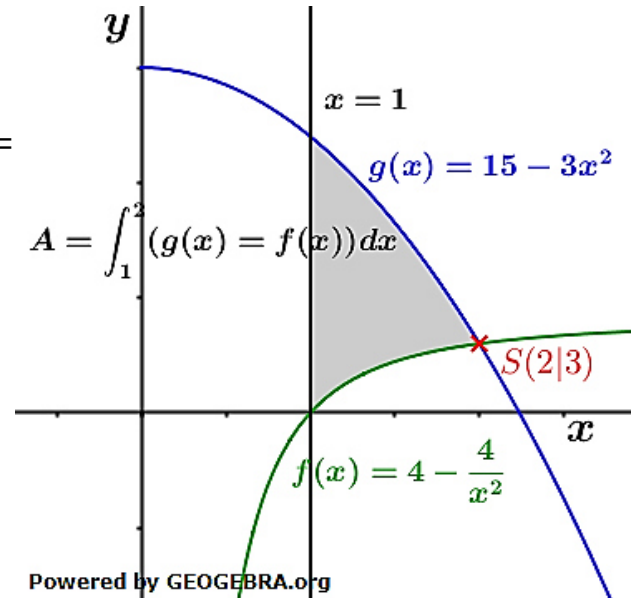
$$A = \int_1^2 \left( 15 - 3x^2 - \left( 4 - \frac{4}{x^2} \right) \right) dx$$

$$A = \int_1^2 \left( 11 - 3x^2 + \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$A = \left[ 11x - x^3 - \frac{4}{x} \right]_1^2$$

$$A = 22 - 8 - 2 -$$

$$(11 - 1 - 4) = 6 \text{ FE}$$

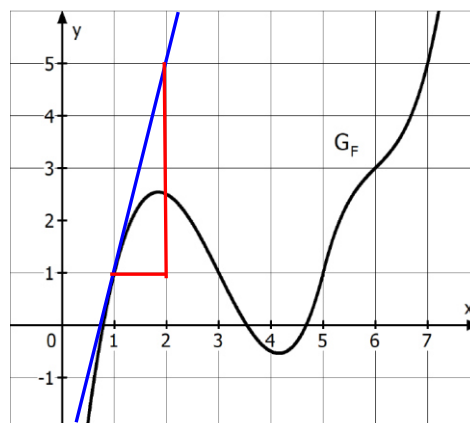


### Lösung Aufgabensatz 1/22 A2

a)  $\int_1^7 f(x) dx = [F(x)]_1^7 = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$

- b) Einzeichnen einer Tangente und Bestimmung des Steigungsdreiecks.

$$f(1) = F'(1) = 4$$





### Lösung Aufgabensatz 1/22 A3

$$f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - kx^2 \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

a) Begründung, dass  $f_2(x)$  achsensymmetrisch ist.

$$f_2(x) = x^4 + (2 - 2) \cdot x^3 - 2x^2 = x^4 - 2x^2$$

Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Potenzen von  $x$ .  
Somit ist der Graph von  $f_2$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse.

b) Wert von  $k$ , für den  $x_w = 1$  eine Wendestelle von  $f_k$  ist.

Wendestellen mit  $f_k''(x) = 0$

$$f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - kx^2$$

$$f_k'(x) = 4x^3 + 3 \cdot (2 - k) \cdot x^2 - 2kx$$

$$f_k''(x) = 12x^2 + 6 \cdot (2 - k) \cdot x - 2k$$

$$f_k''(x) = 12x^2 + (12 - 6k) \cdot x - 2k$$

$$f_k''(x_w) = 0$$

$$12 + (12 - 6k) - 2k = 0$$

$$24 - 8k = 0$$

$$8k = 24$$

$$k = 3$$

$f_3(x)$  hat in  $x_w = 1$  eine Wendestelle.

### Lösung Aufgabensatz 1/22 A4

Allgemeine Form einer quadratischen Gleichung:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p(0) = 1 \rightarrow c = 1$$

Schnittwinkel  $90^\circ$  mit  $y = \frac{1}{4}x + 1$ :

$$p'(0) = -4$$

| Orthogonalitätsbedingung

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$b = -4$$

Extrempunktbestimmung mit  $p'(x) = 0$

$$2ax_E + b = 0$$

$$x_E = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{a}$$

Der  $y$ -Wert an der Stelle  $x_E$  soll  $x_E$  sein,

also  $p(x_E) = x_E$

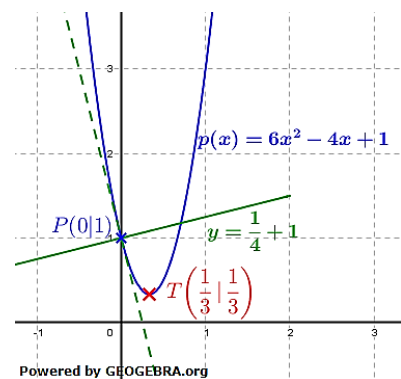
$$a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 1 = \frac{2}{a}$$

|  $\cdot a$

$$4 - 8 + a = 2$$

$$a = 6$$

$$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$$



### Lösung Aufgabensatz 2/22 A1

$$f(x) = e^{0,5x^2}$$

$$f'(x) = x \cdot e^{0,5x^2} \quad | \quad \text{erste Ableitung mit Kettenregel}$$

Für zweite Ableitung ist die Produktregel erforderlich.

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v = e^{0,5x^2} \quad v' = x \cdot e^{0,5x^2}$$

$$f''(x) = e^{0,5x^2} + x^2 \cdot e^{0,5x^2}$$

$$f''(x) = e^{0,5x^2} (1 + x^2)$$

$$f''(0) = e^0 (1 + 0) = 1$$

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A2

$$f(x) = 4 - 3x^2 \text{ und } g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

a) Nachweis des Schnittpunkts bei

$$x_0 = 1:$$

$$f(1) = 4 - 3 = 1$$

$$g(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Die Graphen der beiden Funktionen schneiden sich im Punkt  $S(1|1)$ .

b) Inhalt der markierten Fläche:

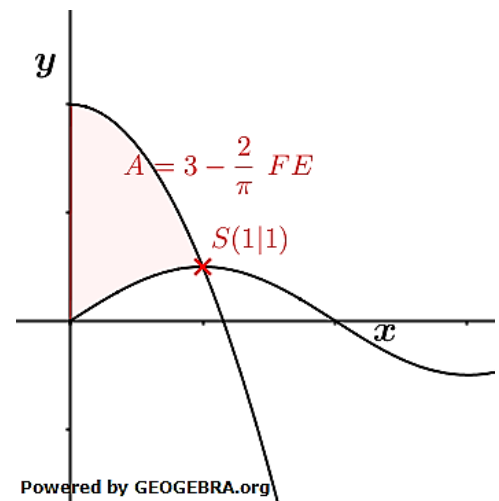
$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$$

$$A = \int_0^1 \left(-3x^2 + 4 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx$$

$$A = \left[-x^3 + 4x + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1$$

$$A = -1 + 4 + 0 - \left(0 + \frac{2}{\pi}\right) = 3 - \frac{2}{\pi}$$

Die markierte Fläche ist  $3 - \frac{2}{\pi}$  FE groß.



### Lösung Aufgabensatz 2/22 A3

$$g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$$

Wir bestimmen zunächst den Tiefpunkt von  $g$  mittels  $g'(x) = 0$  und  $g''(x_E) > 0$ .

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$g''(x) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \quad | \quad \cdot 3; +9$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

$$g''(x_E) > 0 \rightarrow x_E = 3$$

$$g(x_E) = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 = -6$$

Der Tiefpunkt von  $g$  hat die Koordinaten  $T^*(3 | -6)$

Der Tiefpunkt von  $f$  hat die Koordinaten  $T(1 | -2)$

Somit wurde  $f$  um  $a = 2$  Einheiten nach rechts und  $b = 4$  Einheiten nach unten verschoben.

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A4

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit Berührungspunkt der  $x$ -Achse in  $O(0|0)$  lautet

$$f(x) = ax^2 \cdot (x - b)$$

Nach Aufgabenstellung ist  $f'(-2) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$$

$$f'(x) = a(3x^2 - 2bx)$$

$$f'(-2) = a(3(-2)^2 - 2b(-2)) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$3(-2)^2 - 2b(-2) = 0$$

$$12 + 4b = 0$$

$$b = -3$$

$$f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$$

Prüfung auf gemeinsamen Punkt  $P(-3|0)$

*Elegante Lösung:*

Der Punkt  $P(-3|0)$  ist eine Nullstelle. Bei Streckungen ganzrationaler Funktionen verändert sich die Lage der Nullstellen nicht.

*Rechnerische Lösung:*

$$f_a(-3) = f_{a+h}(-3); \quad h \in \mathbb{R}$$

$$f_a(-3) = 9a \cdot (-3 + 3) = 0$$

$$f_{a+h}(-3) = 9(a+h) \cdot (-3 + 3) = 0$$

Der Punkt  $P(-3|0) \in f_a(x)$  mit  $f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$ .