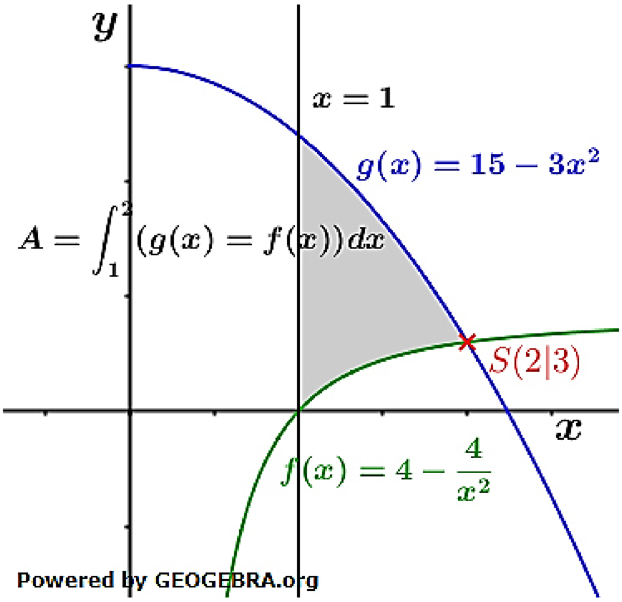
Lösung Aufgabensatz 1/22 A1

$f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$ und

$g(x) = 15 - 3x^2;\;\; x > 0$

a) Nachweis eines Schnittpunktes in $x_0 = 2$.
Dies ist der Fall, wenn $f(2) =$
$f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3.$
$g(2) = 15 - 3 \cdot 2^2 = 3$



b) Die markierte Fläche ist die Fläche zwischen oberer Kurve g und unterer Kurve f im Intervall $I = [1; 2]$.

$A = \int_1^2 (g(x) - f(x))\, dx$

$A = \int_1^2 \left(15 - 3x^2 - (4 - \frac{4}{x^2})\right) dx$

$A = \int_1^2 \left(11 - 3x^2 + \frac{4}{x^2}\right) dx$

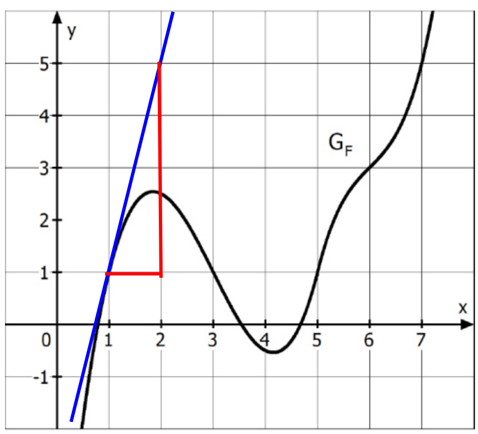
$A = \left[11x - x^3 - \frac{4}{x}\right]_1^2$

$A = 22 - 8 - 2 - (11 - 1 - 4) = 6\, FE$

Lösung Aufgabensatz 1/22 A2

a) $\int_1^7 f(x)\;dx = [F(x)]_1^7 = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$

b) Einzeichnen einer Tangente und Bestimmung des Steigungsdreiecks.
$f(1) = F'(1) = 4$



Lösung Aufgabensatz 1/22 A3

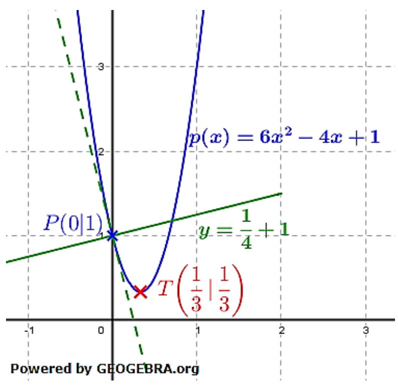
$f_k(x) = x^4 + (2-k) \cdot x^3 - kx^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Begründung, dass $f_2(x)$achsensymmetrisch ist.
$f_2(x) = x^4 + (2-2) \cdot x^3 - 2x^2 = x^4 - 2x^2$
Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Potenzen von x.
Somit ist der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse.

b) Wert von k, für den $x_w = 1$ eine Wendestelle von f_k ist.
Wendestellen mit $f_k''(x) = 0$
$f_k(x) = x^4 + (2-k) \cdot x^3 - kx^2$
$f_k'(x) = 4x^3 + 3 \cdot (2-k) \cdot x^2 - 2kx$
$f_k''(x) = 12x^2 + 6 \cdot (2-k) \cdot x - 2k$
$f_k''(x) = 12x^2 + (12-6k) \cdot x - 2k$
$f_k''(x_w) = 0$
$12 + (12-6k) - 2k = 0$
$24 - 8k = 0$
$8k = 24$
$k = 3$
$f_3(x)$ hat in $x_w = 1$ eine Wendestelle.

Lösung Aufgabensatz 1/22 A4

Allgemeine Form einer quadratischen Gleichung:
$p(x) = ax^2 + bx + c$
$p(0) = 1 \;\Rightarrow\; c = 1$
Schnittwinkel 90 ° mit $y = \frac{1}{4}x + 1$:
$p'(0) = -4 \quad | \quad$ Orthogonalitätsbedingung
$p'(x) = 2ax + b$
$b = -4$
Extrempunktbestimmung mit $p'(x) = 0$
$2ax_E + b = 0$
$x_E = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{a}$
Der y-Wert an der Stelle x_E soll x_E sein,
also $p(x_E) = x_E$
$a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 1 = \frac{2}{a} \quad | \quad \cdot a$
$4 - 8 + a = 2$
$a = 6$
$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$



Lösung Aufgabensatz 2/22 A1

$f(x) = e^{0{,}5x^2}$

$f'(x) = x \cdot e^{0{,}5x^2}$ | erste Ableitung mit Kettenregel

Für zweite Ableitung ist die Produktregel erforderlich.

$u = x$ $u' = 1$

$v = e^{0{,}5x^2}$ $v' = x \cdot e^{0{,}5x^2}$

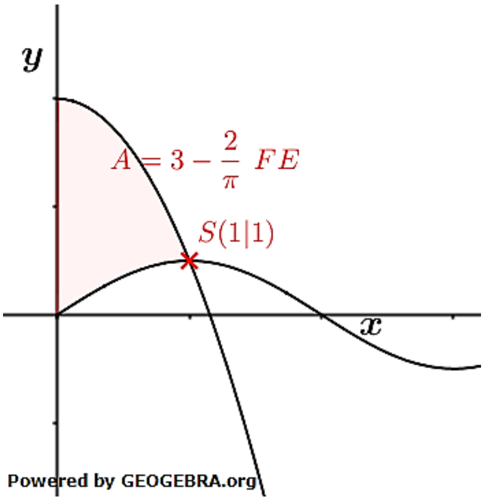
$f''(x) = e^{0{,}5x^2} + x^2 \cdot e^{0{,}5x^2}$

$f''(x) = e^{0{,}5x^2}(1 + x^2)$

$f''(0) = e^0(1 + 0) = 1$

Lösung Aufgabensatz 2/22 A2

$f(x) = 4 - 3x^2$ und $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$



a) Nachweis des Schnittpunkts bei $x_0 = 1$:

$f(1) = 4 - 3 = 1$

$g(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Die Graphen der beiden Funktionen schneiden sich im Punkt $S(1|1)$.

b) Inhalt der markierten Fläche:

$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$

$A = \int_0^1 \left(-3x^2 + 4 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx$

$A = \left[-x^3 + 4x + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1$

$A = -1 + 4 + 0 - \left(0 + \frac{2}{\pi}\right) = 3 - \frac{2}{\pi}$

Die markierte Fläche ist $3 - \frac{2}{\pi}\ FE$ groß.

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung Aufgabensatz 2/22 A3

$g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$

Wir bestimmen zunächst den Tiefpunkt von g mittels $g'(x) = 0$ und $g''(x_E) > 0$.

$g'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

$g''(x) = \frac{2}{3}x$

$\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \qquad | \quad \cdot 3;\ +9$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

$g''(x_E) > 0 \Rightarrow \quad x_E = 3$

$g(x_E) = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 = -6$

Der Tiefpunkt von g hat die Koordinaten $T^*(3|-6)$

Der Tiefpunkt von f hat die Koordinaten $T(1|-2)$

Somit wurde f um $a = 2$ Einheiten nach rechts und $b = 4$ Einheiten nach unten verschoben.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A4

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit Berührpunkt der x-Achse in $O(0|0)$ lautet

$f(x) = ax^2 \cdot (x - b)$

Nach Aufgabenstellung ist $f'(-2) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$

$f'(x) = a(3x^2 - 2bx)$

$f'(-2) = a\big(3(-2)^2 - 2b(-2)\big) = 0 \qquad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$3(-2)^2 - 2b(-2) = 0$

$12 + 4b = 0$

$b = -3$

$f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$

Prüfung auf gemeinsamen Punkt $P(-3|0)$

Elegante Lösung:

Der Punkt $P(-3|0)$ ist eine Nullstelle. Bei Streckungen ganzrationaler Funktionen verändert sich die Lage der Nullstellen nicht.

Rechnerische Lösung:

$f_a(-3) = f_{a+h}(-3);\ \ h \in \mathbb{R}$

$f_a(-3) = 9a \cdot (-3 + 3) = 0$

$f_{a+h}(-3) = 9(a + h) \cdot (-3 + 3) = 0$

Der Punkt $P(-3|0) \in f_a(x)$ mit $f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$.