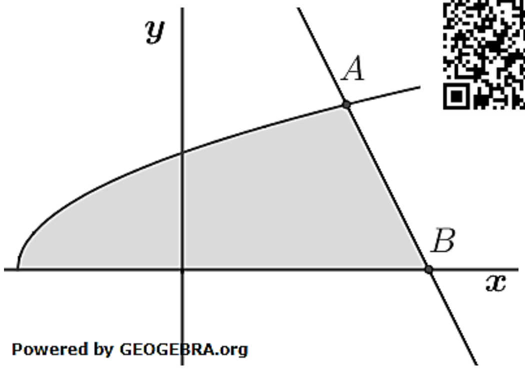
Aufgabensatz 1/23 A1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}$ und die Gerade durch die Punkte $A(2|2)$ und $B(3|0)$.

a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



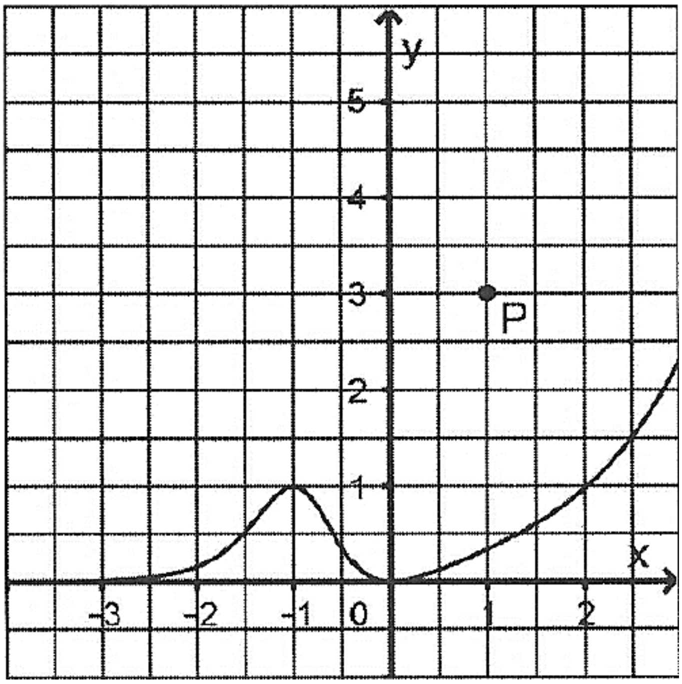
(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A2

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f, dessen einzige Extrempunkte $A(-1|1)$ und $B(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = -f(x-3)$ an.

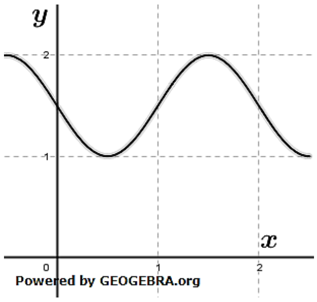
b) Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abbildung.



(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A3

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



a) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„Für jeden Wert von x mit $0 \leq x \leq 2$ ist die Steigung des Graphen von f kleiner als 3."

b) Mit dem Term $\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2\,dx$ kann das Volumen eines Körpers berechnet werden. Begründen Sie, dass dieses Volumen größer als $\pi \cdot 0{,}5^2 + \pi \cdot 1{,}0^2$ ist.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A1

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter f'' hat folgende Eigenschaften:

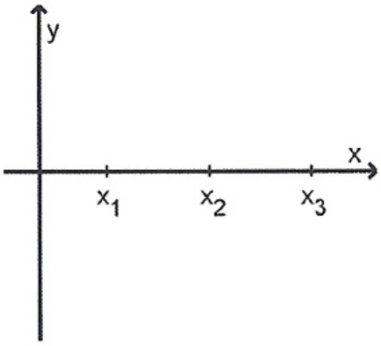
- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die Abbildung zeigt die Position von x_1, x_2 und x_3.

a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

b) Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f.

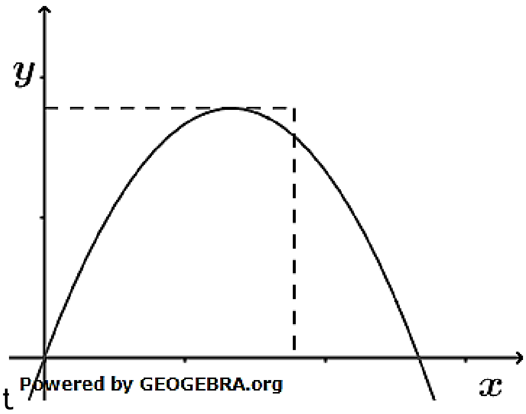
Abbildung



(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A2

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit
$f(x) = -x^2 + 2ax;\ \ a \in\,]1;\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

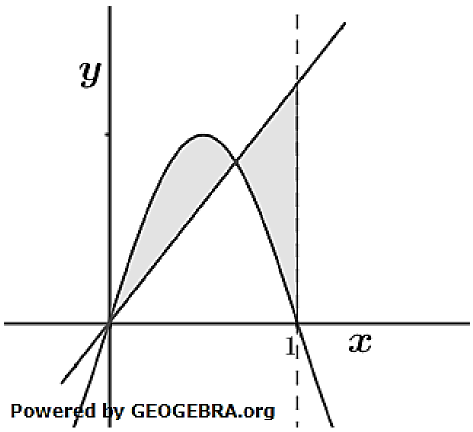


a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung).
Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A3



Abgebildet sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x)$ sowie eine Ursprungsgerade g mit der Steigung m.

a) Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion von f, deren Graph den Ursprung enthält.

b) Berechnen Sie den Wert von m, für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind.

(Quelle Abitur BW 2023)

Lösung Aufgabensatz 1/23 A1

Lösungslogik

$f(x) = \sqrt{x+2}$

a) Für die maximale Definitionsmenge darf die Wurzel nicht kleiner als Null werden.

b) Der Inhalt der markierten Fläche ergibt sich aus der Summe zweier Integrale, zum einen aus der Fläche unter f von deren Nullstelle bis zum x-Wert des Punktes A und zum anderen der Fläche unter der Geraden vom x-Wert des Punktes A bis zum x-Wert des Punktes B.

Klausuraufschrieb

) $x + 2 \geq 0$

$x \geq -2$

$\mathbb{D} = \ x \in \mathbb{R};\ x \geq -2$

b) $A_{ges} = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$

$g(x) = mx + c$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{3-2} = -2$

$g(x) = -2x + c$

Punktprobe mit B:

$0 = -2 \cdot 3 + c$

$c = 6$

$g(x) = -2x + 6$

$\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}dx = \int_{-2}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{3}\right]_{-2}^{2}$

$= \frac{2\cdot 4\cdot 2}{3} = \frac{16}{3}\ FE$

$\int_{2}^{3}(-2x+6)dx = [-x^2 + 6x]_2^3 = -9 + 18 - (-4 + 12) = 1$

$A_{ges} = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}\ FE$

Lösung Aufgabensatz 1/23 A2

Lösungslogik

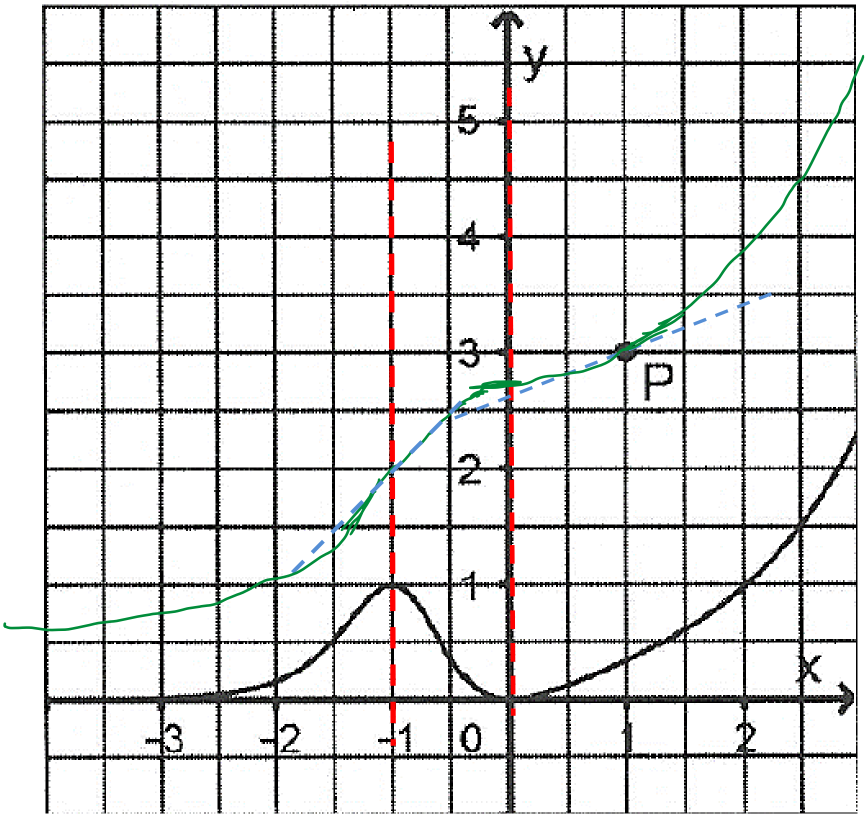
a) Den Aufgabenangaben entnehmen wir, dass f zunächst an der x-Achse gespiegelt wird und dann um 2 Einheiten nach rechts verschoben wird.

b) Extrempunkte der Ableitung sind Wendepunkte der Stammfunktion.
Der Extrempunkt im Ursprung (Berührpunkt mit der x-Achse) führt zu einem Sattelpunkt in der Stammfunktion.

Klausuraufschrieb:

a) $g(x) = -f(x)$:
$g(x)$ ist Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse. Damit sind die Koordinaten des gespiegelten Punkte $P(1|-3)$
$g(x) = -f(x-3)$:
Die Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse wird um drei Einheiten nach rechts verschoben.
Koordinaten des gespiegelten und verschobenen Punktes nunmehr Punkte $P(3|-3)$.

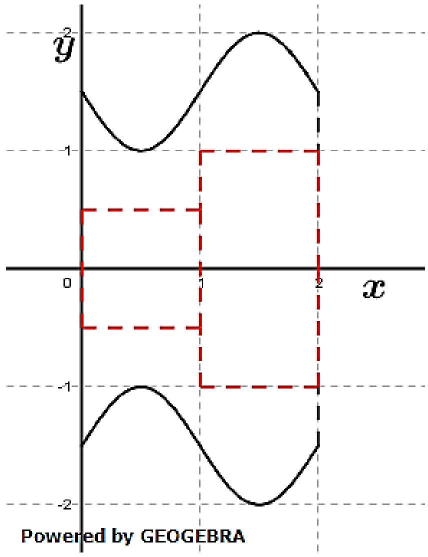
b)



Lösung Aufgabensatz 1/23 A3

a) Die Grafik zeigt eine an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve mit einer Amplitude von $a = 0{,}5$, einer Periode $p = 2$, die in y-Richtung um $1{,}5$ Einheiten nach oben verschoben wurde.
$f(x) = -0{,}5\cos(\pi x) + 1{,}5$
$f'(x) = -\frac{1}{2\pi}\sin(\pi x) + 1{,}5x$
Maximale Steigung im Wendepunkt bei $x_0 = 1$.
$f'(1) = -\frac{1}{2\pi}\sin(\pi) + 1{,}5 = 0 + 1{,}5 = 1{,}5$
Die maximale Steigung ist $f'(1) = 1{,}5$, die Aussage stimmt.

b) Der Term $\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2\,dx$ gibt das Volumen des Körpers an, der entsteht, wenn das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, um die x-Achse rotiert.
<u>Interpretation des Terms $\pi \cdot 0{,}5^2 + \pi \cdot 1{,}0^2$:</u>
Das Volumen eines Zylinders errechnet sich aus $V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{zyl}$.
Betrachtet man sich die Grafik, so kann man sich im Intervall $[0;1]$ einen Zylinder vorstellen mit Radius $r = 0{,}5$ und $h_{zyl} = 1$.
Somit ist $\pi \cdot 0{,}5^2$ das Volumen eines Zylinders mit diesen Maßen.
Betrachtet man sich die Grafik, so kann man sich im Intervall $[1;2]$ einen Zylinder vorstellen mit Radius $r = 1$ und $h_{zyl} = 1$. Somit ist $\pi \cdot 1{,}0^2$ das Volumen eines Zylinders mit diesen Maßen.

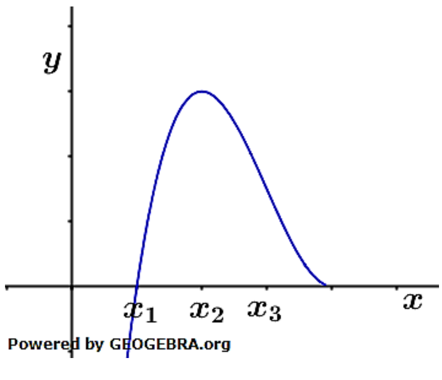


Die Summe der Volumina dieser beide Zylinder ist – wie man in der Grafik erkennen kann – kleiner als das Volumen des um die x-Achse rotierenden Graphen der Funktion f.

Lösung Aufgabensatz 2/23 A1

a) f' hat ein Minimum (Aufgabenstellung).
Damit ist f mindestens vom Grad 3.

b) Der Graph von f hat bei x_1 eine Nullstelle und bei x_2 eine Extremstelle und bei x_3 eine Wendestelle.
Da f' bei x_3 ein Minimum besitzt, besitzt die Wendestelle von f eine Tangente mit einer minimalen Steigung.



Lösung Aufgabensatz 2/23 A2

$f(x) = -x^2 + 2ax;\;\; a \in\,]1;\infty[$ mit $N_1(0|0)$ und $N_2(2a|0)$.

a) Berechnung Flächeninhalt unter f:

$$A_f = \int_0^{2a}(-x^2 + 2ax\,)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{1}{3}\cdot 8a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

b) Bestimmung des Hochpunktes = Seitenlänge des Quadrats.
Der Hochpunkt liegt in der Mitte der beiden Nullstellen, also bei $x = a$.

$f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$

Fläche Quadrat

$A_{Quadrat} = a^2 \cdot a^2 = a^4$

Fläche unter der Kurve gleichsetzen mit Fläche des Quadrats:

$\frac{4}{3}a^3 = a^4$

$a^4 - \frac{4}{3}a^3 = 0$

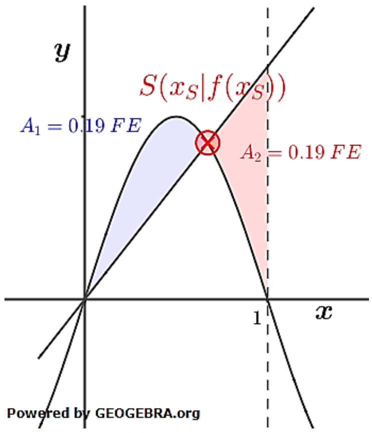
$a^3\left(a - \frac{4}{3}\right) = 0$

$a_1 = 0;\;\; a_2 = \frac{4}{3}$

a_1 ist keine Lösung der Aufgabe.
Der Wert von a beträgt $\frac{4}{3}\,LE$.

Lösung Aufgabensatz 2/23 A3

a) Bestimmung der Stammfunktion von f, die durch den Ursprung verläuft:



$F(x) = \int \sin(\pi x)\; dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + C$

$F(0) = 0$

$-\frac{\cos(0)}{\pi} + C = 0$

$-\frac{1}{\pi} + C = 0$

$C = 1/\pi$

$F(x) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos(\pi x))$

b) Flächenberechnungen über Integral zwischen Graphen.

$A_1 = \int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx$

$A_2 = \int_{x_2}^{1}(g(x) - f(x))\,dx$

$A_1 = A_2$ (Aufgabenstellung)

$\int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx = \int_{x_2}^{1}(g(x) - f(x))\,dx$

$\int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx - \int_{x_2}^{1}\big(g(x) - f(x)\big)\,dx = 0$

$\int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx + \int_{x_S}^{1}\big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 0$

$\int_0^{x_S}(\sin\,(\pi x) - mx)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x) - \frac{1}{2}mx^2\right]_0^{x_S} = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2}mx_S^2 + \frac{1}{\pi}$

$\int_{x_S}^{1}(sin(\pi x) - mx)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x) - \frac{1}{2}mx^2\right]_{x_S}^{1} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}m - (-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2}mx_S^2)$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}m + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) + \frac{1}{2}mx_S^2$

$-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S)-\frac{1}{2}mx_S^2+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S)+\frac{1}{2}mx_S^2=0$
$\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}m=0$
$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}m$
$m=\frac{4}{\pi}\approx 1{,}27$