

Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021



Aufgabensatz 1/21 A5

Gegeben sind die Ebenen E und F sowie die Ebenenschar G_r ($r \in \mathbb{R}$).

$$E: x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$$

$$F: 2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$G_r: 9x_2 + 3x_3 = r + 11$$

- Stellen Sie die Ebene G_7 in einem Koordinatensystem dar.
- Für einen Wert von r besitzen E , F und G_r eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimmen Sie diesen Wert von r .

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabensatz 1/21 A6

Gegeben sind der Punkt $P(-1|1|-1)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

Der Punkt $Q(3|3|3)$ liegt auf der Geraden g .

- Zeigen Sie, dass Q derjenige Punkt auf g ist, der zu P den kleinsten Abstand hat.
- Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R auf der Geraden g , für den das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 hat.

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabensatz 2/21 A5

Gegeben sind die Punkte $A(6|4|-1)$ und $B(0|-5|2)$ sowie die Ebene

$$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6.$$

- Die Gerade durch A und B schneidet E im Punkt S . Bestimmen Sie die Koordinaten von S .
- Untersuchen Sie, ob der Punkt S auf der Strecke AB liegt.

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabensatz 2/21 A6

Gegeben ist die Ebene $E: 3x_2 - 4x_3 = 2$.

- Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.
- Die Ebene F ist orthogonal zu E und hat zur x_1 -Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von F .

(Quelle Abitur BW 2021)

Prüfungsaufgaben

Leistungskurs Analytische Geometrie Pflichtteil

Lösungen

© by Fit-in-Mathe-Online.de

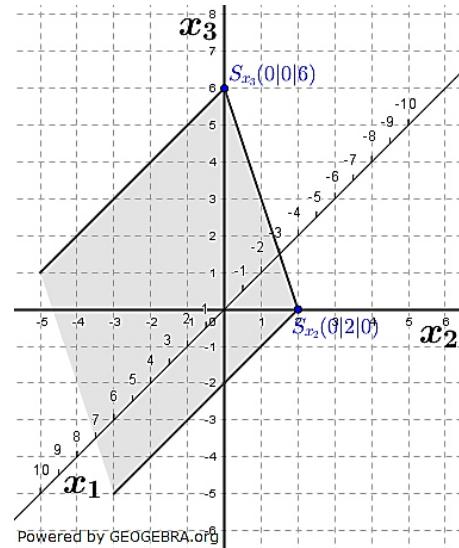
Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021

Lösung Aufgabensatz 1/21 A5

$$G_7: 9x_2 + 3x_3 = 18$$

- a) Zum Zeichnen der Ebene benötigen wir deren Spurpunkte.

$$S_{x_2}(0|2|0); \quad S_{x_3} = (0|0|6)$$



- b) Zur Bestimmung einer gemeinsamen Schnittgeraden stellen wir eine Gauß-Matrix auf.

$$x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$9x_2 + 3x_3 = r + 11$$

Gauß-Matrix:

x_1	x_2	x_3	=
1	-5	-2	6
2	-1	-1	3
0	9	3	$r + 11$

$II - 2 \cdot I$ ←

x_1	x_2	x_3	=
1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	9	3	$r + 11$

$III - II$ ←

x_1	x_2	x_3	=
1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	0	0	$r + 11$

$$\text{Aus (III) folgt: } r + 11 = 0 \rightarrow r = -11$$

Für $r = -11$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, d.h., die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021 Lösung Aufgabensatz 1/21 A6

- a) Hat P zu Q den kleinsten Abstand zu g , so muss der Vektor \overrightarrow{PQ} senkrecht auf dem Richtungsvektor von g stehen.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{rv_g} \Rightarrow P$ hat zu Q den kleinsten Abstand von g .

- b) Das Dreieck PQR ist bei Q rechtwinklig. Somit gilt für die Fläche dieses Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}|$.

Wir bilden den Vektor \overrightarrow{QR} :

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1+t-3 \\ -1+2t-3 \\ 7-2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+t \\ -4+2t \\ 4-2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(t-2)^2 + (2t-4)^2 + (4-2t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + 16 - 16t + 4t^2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{9t^2 - 36t + 36} = 3 \cdot \sqrt{9(t^2 - 4t + 4)} = 9 \cdot \sqrt{(t-2)^2} \\ &= 9 \cdot (t-2) \end{aligned}$$

Die Fläche soll betragen.

$$9 \cdot (t-2) = 27$$

$$t-2 = 3 \Rightarrow t = 5$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt R hat die Koordinaten $R(7|9|-3)$.

Lösung Aufgabensatz 2/21 A5

$$A(6|4|-1); B(0|-5|2); E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6.$$

- a) Aufstellung der Geraden g :

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$:

Aus g folgt:

$$x_1 = 6 + 2t; \quad x_2 = 4 + 3t; \quad x_3 = -1 - t$$

$$E: 2 \cdot (6 + 2t) - 2 \cdot (4 + 3t) - 1 - t = 6$$

$$12 + 4t - 8 - 6t - 1 - t = 6$$

$$3 - 3t = 6$$

$$-3t = 3$$

$$t = -1$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(4|1|0)$.

Prüfungsaufgaben

Leistungskurs Analytische Geometrie Pflichtteil

Lösungen

© by Fit-in-Mathe-Online.de

Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit S :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4 = 6 - 6t$$

$$6t = 2$$

$$t = \frac{1}{3}$$

Wegen $0 < t < 1$ liegt der Punkt S auf der Strecke AB .

Lösung Aufgabensatz 2/21 A6

E: $3x_2 - 4x_3 = 2$.

- a) Die Ebene E verläuft parallel zur x_1 -Achse, da in der Ebenengleichung die x_1 -Koordinate fehlt.

- b) Die Ebene F die senkrecht auf steht, muss den Normalenvektor $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

haben, denn $\vec{n}_E \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Die Ebenengleichung lautet $F: 4x_2 + 3x_3 = d$

Die Ebene F soll einen Abstand von 10 zur x_1 -Achse haben. Da F ebenfalls parallel zur x_1 -Achse verläuft, hat jeder Punkt der x_1 -Achse denselben Abstand, somit auch der Ursprung. Wir bestimmen den Parameter d über die HNF.

HNF von F :

$$\frac{|4x_2+3x_3+d|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x_2+3x_3+d|}{5} = 0$$

$$d(0; F) = \frac{|d|}{5} = 2$$

$$|d| = 10$$

$$d_1 = 10; \quad d_2 = -10$$

Es existieren somit zwei Ebenen, die die Aufgabenbedingung erfüllen.

$$F_1 = 4x_2 + 3x_3 = 10; \quad F_2 = 4x_2 + 3x_3 = -10$$