



### Aufgabensatz 1/21 A5

Gegeben sind die Ebenen  $E$  und  $F$  sowie die Ebenenschar  $G_r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ).

$$E: x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$$

$$F: 2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$G_r: 9x_2 + 3x_3 = r + 11$$

- a) Stellen Sie die Ebene  $G_r$  in einem Koordinatensystem dar.
- b) Für einen Wert von  $r$  besitzen  $E$ ,  $F$  und  $G_r$  eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimmen Sie diesen Wert von  $r$ .

(Quelle Abitur BW 2021)

### Aufgabensatz 1/21 A6

Gegeben sind der Punkt  $P(-1|1|-1)$  und die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ .

Der Punkt  $Q(3|3|3)$  liegt auf der Geraden  $g$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $Q$  derjenige Punkt auf  $g$  ist, der zu  $P$  den kleinsten Abstand hat.
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes  $R$  auf der Geraden  $g$ , für den das Dreieck  $PQR$  den Flächeninhalt 27 hat.

(Quelle Abitur BW 2021)

### Aufgabensatz 2/21 A5

Gegeben sind die Punkte  $A(6|4|-1)$  und  $B(0|-5|2)$  sowie die Ebene

$$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6.$$

- a) Die Gerade durch  $A$  und  $B$  schneidet  $E$  im Punkt  $S$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $S$ .
- b) Untersuchen Sie, ob der Punkt  $S$  auf der Strecke  $AB$  liegt.

(Quelle Abitur BW 2021)

### Aufgabensatz 2/21 A6

Gegeben ist die Ebene  $E: 3x_2 - 4x_3 = 2$ .

- a) Beschreiben Sie die besondere Lage von  $E$  im Koordinatensystem.
- b) Die Ebene  $F$  ist orthogonal zu  $E$  und hat zur  $x_1$ -Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von  $F$ .

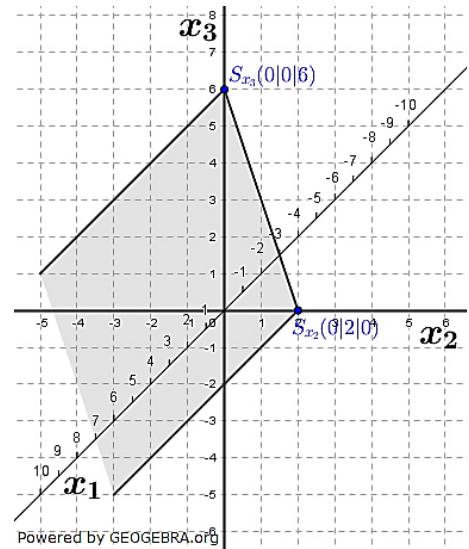
(Quelle Abitur BW 2021)

### Lösung Aufgabensatz 1/21 A5

$G_7: 9x_2 + 3x_3 = 18$

- a) Zum Zeichnen der Ebene benötigen wir deren Spurpunkte.

$S_{x_2}(0|2|0); S_{x_3} = (0|0|6)$



- b) Zur Bestimmung einer gemeinsamen Schnittgeraden stellen wir eine Gauß-Matrix auf.

$x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$

$2x_1 - x_2 - x_3 = 3$

$9x_2 + 3x_3 = r + 11$

Gauß-Matrix:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	=
1	-5	-2	6
2	-1	-1	3
0	9	3	$r + 11$

$II - 2 \cdot I \leftarrow$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	=
1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	9	3	$r + 11$

$III - II \leftarrow$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	=
1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	0	0	$r + 11$

Aus (III) folgt:  $r + 11 = 0 \rightarrow r = -11$

Für  $r = -11$  hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, d.h., die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

*Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021*

**Lösung Aufgabensatz 1/21 A6**

- a) Hat  $P$  zu  $Q$  den kleinsten Abstand zu  $g$ , so muss der Vektor  $\overrightarrow{PQ}$  senkrecht auf dem Richtungsvektor von  $g$  stehen.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{rv_g} \rightarrow P$  hat zu  $Q$  den kleinsten Abstand von  $g$ .

- b) Das Dreieck  $PQR$  ist bei  $Q$  rechtwinklig. Somit gilt für die Fläche dieses Dreiecks  $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}|$ .

Wir bilden den Vektor  $\overrightarrow{QR}$ :

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 + t - 3 \\ -1 + 2t - 3 \\ 7 - 2t - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + t \\ -4 + 2t \\ 4 - 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(t-2)^2 + (2t-4)^2 + (4-2t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + 16 - 16t + 4t^2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{9t^2 - 36t + 36} = 3 \cdot \sqrt{9(t^2 - 4t + 4)} = 9 \cdot \sqrt{(t-2)^2} \\ &= 9 \cdot (t-2) \end{aligned}$$

Die Fläche soll betragen.

$$9 \cdot (t-2) = 27$$

$$t-2 = 3 \rightarrow t = 5$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt  $R$  hat die Koordinaten  $R(7|9|-3)$ .

**Lösung Aufgabensatz 2/21 A5**

$A(6|4|-1)$ ;  $B(0|-5|2)$ ;  $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$ .

- a) Aufstellung der Geraden  $g$ :

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$ :

Aus  $g$  folgt:

$$x_1 = 6 + 2t; \quad x_2 = 4 + 3t; \quad x_3 = -1 - t$$

$$E: 2 \cdot (6 + 2t) - 2 \cdot (4 + 3t) - 1 - t = 6$$

$$12 + 4t - 8 - 6t - 1 - t = 6$$

$$3 - 3t = 6$$

$$-3t = 3$$

$$t = -1$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten  $S(4|1|0)$ .

*Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021*

b)  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit  $S$ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4 = 6 - 6t$$

$$6t = 2$$

$$t = \frac{1}{3}$$

Wegen  $0 < t < 1$  liegt der Punkt  $S$  auf der Strecke  $AB$ .

### Lösung Aufgabensatz 2/21 A6

$E: 3x_2 - 4x_3 = 2$ .

a) Die Ebene  $E$  verläuft parallel zur  $x_1$ -Achse, da in der Ebenengleichung die  $x_1$ -Koordinate fehlt.

b) Die Ebene  $F$  die senkrecht auf  $E$  steht, muss den Normalenvektor  $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

haben, denn  $\vec{n}_E \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Die Ebenengleichung lautet  $F: 4x_2 + 3x_3 = d$

Die Ebene  $F$  soll einen Abstand von 10 zur  $x_1$ -Achse haben. Da  $F$  ebenfalls parallel zur  $x_1$ -Achse verläuft, hat jeder Punkt der  $x_1$ -Achse denselben Abstand, somit auch der Ursprung. Wir bestimmen den Parameter  $d$  über die HNF.

HNF von  $F$ :

$$\frac{|4x_2 + 3x_3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4x_2 + 3x_3 + d|}{5} = 0$$

$$d(0; F) = \frac{|d|}{5} = 2$$

$$|d| = 10$$

$$d_1 = 10; \quad d_2 = -10$$

Es existieren somit zwei Ebenen, die die Aufgabenbedingung erfüllen.

$$F_1 = 4x_2 + 3x_3 = 10; \quad F_2 = 4x_2 + 3x_3 = -10$$