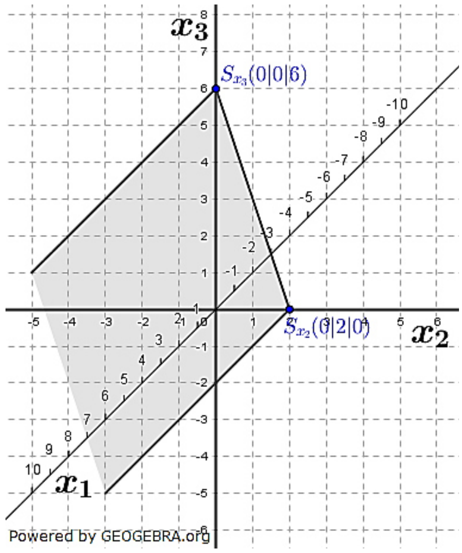
Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021

Lösung Aufgabensatz 1/21 A5

G_7: $\quad 9x_2 + 3x_3 = 18$

a) Zum Zeichnen der Ebene benötigen wir deren Spurpunkte.
$S_{x_2}(0|2|0)$; $S_{x_3} = (0|0|6)$



b) Zur Bestimmung einer gemeinsamen Schnittgeraden stellen wir eine Gauß-Matrix auf.

$$x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$
$$9x_2 + 3x_3 = r + 11$$

Gauß-Matrix:

x_1	x_2	x_3	$=$	
1	−5	−2	6	
2	−1	−1	3	$II - 2 \cdot I$
0	9	3	$r+11$	

x_1	x_2	x_3	$=$	
1	−5	−2	6	
0	9	3	−9	
0	9	3	$r+11$	$III - II$

x_1	x_2	x_3	$=$
1	−5	−2	6
0	9	3	−9
0	0	0	$r+11$

Aus (III) folgt: $r + 11 = 0$ ➔ $r = -11$

Für $r = -11$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, d.h., die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2021

Lösung Aufgabensatz 1/21 A6

a) Hat P zu Q den kleinsten Abstand zu g, so muss der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von g stehen.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 3-1 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{rv_g}$ ➔ P hat zu Q den kleinsten Abstand von g.

b) Das Dreieck PQR ist bei Q rechtwinklig. Somit gilt für die Fläche dieses Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}|$.

Wir bilden den Vektor $\overrightarrow{QR}$:

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1+t-3 \\ -1+2t-3 \\ 7-2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+t \\ -4+2t \\ 4-2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2+2^2+4^2} \cdot \sqrt{(t-2)^2+(2t-4)^2+(4-2t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{t^2-4t+4+4t^2-16t+16+16-16t+4t^2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{9t^2-36t+36} = 3 \cdot \sqrt{9(t^2-4t+4)} = 9 \cdot \sqrt{(t-2)^2} \\ &= 9 \cdot (t-2) \end{aligned}$$

Die Fläche soll betragen.

$9 \cdot (t-2) = 27$

$t - 2 = 3$ ➔ $t = 5$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt R hat die Koordinaten $R(7|9|-3)$.

Lösung Aufgabensatz 2/21 A5

$A(6|4|-1)$; $B(0|-5|2)$; E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

a) Aufstellung der Geraden g:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$:

Aus g folgt:

$x_1 = 6 + 2t$; $x_2 = 4 + 3t$; $x_3 = -1 - t$

E: $2 \cdot (6+2t) - 2 \cdot (4+3t) - 1 - t = 6$

$12 + 4t - 8 - 6t - 1 - t = 6$

$3 - 3t = 6$

$-3t = 3$

$t = -1$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(4|1|0)$.

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit S:

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$4 = 6 - 6t$

$6t = 2$

$t = \frac{1}{3}$

Wegen $0 < t < 1$ liegt der Punkt S auf der Strecke AB.

Lösung Aufgabensatz 2/21 A6

$E\colon\ 3x_2 - 4x_3 = 2$.

a) Die Ebene E verläuft parallel zur x_1-Achse, da in der Ebenengleichung die x_1-Koordinate fehlt.

b) Die Ebene F die senkrecht auf steht, muss den Normalenvektor $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ haben, denn $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Die Ebenengleichung lautet $F\colon\ 4x_2 + 3x_3 = d$

Die Ebene F soll einen Abstand von 10 zur x_1-Achse haben. Da F ebenfalls parallel zur x_1-Achse verläuft, hat jeder Punkt der x_1-Achse denselben Abstand, somit auch der Ursprung. Wir bestimmen den Parameter d über die HNF.

HNF von F:

$\frac{|4x_2+3x_3+d|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x_2+3x_3+d|}{5} = 0$

$d(0;F) = \frac{|d|}{5} = 2$

$|d| = 10$

$d_1 = 10;\quad d_2 = -10$

Es existieren somit zwei Ebenen, die die Aufgabenbedingung erfüllen.

$F_1 = 4x_2 + 3x_3 = 10;\quad F_1 = 4x_2 + 3x_3 = -10$