



Aufgabensatz 1/22 A5

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ und die

Ebene $E: 3x_1 - x_3 = -2$.

a) Begründen Sie, dass g orthogonal zu E ist.

b) Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ hat mit E keinen gemeinsamen Punkt.

Es gibt Geraden, die in E liegen und parallel zu h verlaufen.

Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, die von h den kleinsten Abstand hat.

(Quelle Abitur BW 2022)

Aufgabensatz 1/22 A6

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

b) Auf der Geraden durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E . Dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P .

Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q .

Bestimmen Sie die Koordinaten von R .

(Quelle Abitur BW 2022)

Aufgabensatz 2/22 A5

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine

Gerade $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie den Wert von a , für den die Gerade g_a parallel zu E ist.

b) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist P_a der Schnittpunkt von g_a mit der x_1x_3 -Ebene. Bestimmen Sie den Wert von a , für den P_a in E liegt.

(Quelle Abitur BW 2022)

Aufgabensatz 2/22 A6

Gegeben sind die parallelen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

- a) Der Punkt $A(4|-3|0)$ liegt auf g . Weisen Sie nach, dass A derjenige Punkt auf g ist, der vom Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand hat.
- b) Die Gerade h ist die Bildgerade von g bei einer Spiegelung an der Ebene E .
Ermitteln Sie eine Gleichung von E .

(Quelle Abitur BW 2022)

Lösung Aufgabensatz 1/22 A5

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \text{ und } E: 3x_1 - x_3 = -2$$

a) Richtungsvektor Gerade $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Normalenvektor Ebene $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wegen $\vec{u} = \vec{n}_E$ ist g orthogonal zu E .

b) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \parallel E$ wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Gesucht ist die Gerade in E , die senkrecht unter der Geraden h liegt.

Wir bilden eine Hilfsgerade j durch den Aufpunkt von h mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir schneiden diese Gerade mit der Ebene E und erhalten dadurch den Lotfußpunkt L .

Aus f folgt:

$$x_1 = 7 + 3r$$

$$x_3 = 3 - r$$

$$x_1; x_3 \rightarrow E$$

$$3 \cdot (7 + 3r) - (3 - r) = -2$$

$$21 + 9r - 3 + r = -2$$

$$10r = -20$$

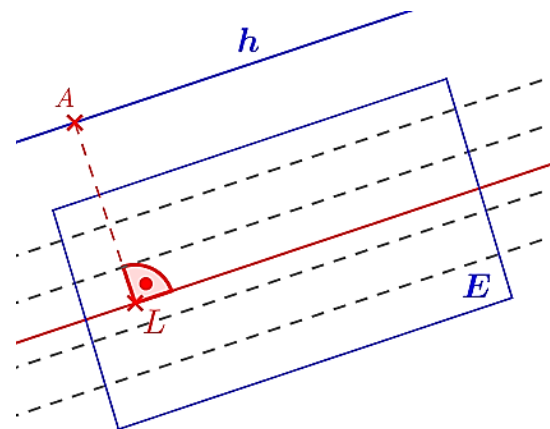
$$r = -2$$

$$r \rightarrow j$$

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt wird zum Aufpunkt der gesuchten Gerade.

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung Aufgabensatz 1/22 A6

$P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt ergibt $Q(7|2|11)$.

- a) Die Ebene an der gespiegelt wird, muss in der Mitte der Strecke \overline{PQ} liegen. Der Mittelpunkt der Strecke sei M .

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+7 \\ 2+2 \\ 3+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$M \in E$. Der Normalenvektor von E ist der Vektor \overrightarrow{PQ}

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-2 \\ 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + 4x_3 = d \quad | \quad \text{Punktprobe mit } M$$

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = d$$

$$d = 40$$

Die Spiegelebene hat die Gleichung $3x_1 + 4x_3 = 40$

- b) Die Grafik verdeutlicht die Situation.

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{RP}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{MQ}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7-4 \\ 2-2 \\ 11-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

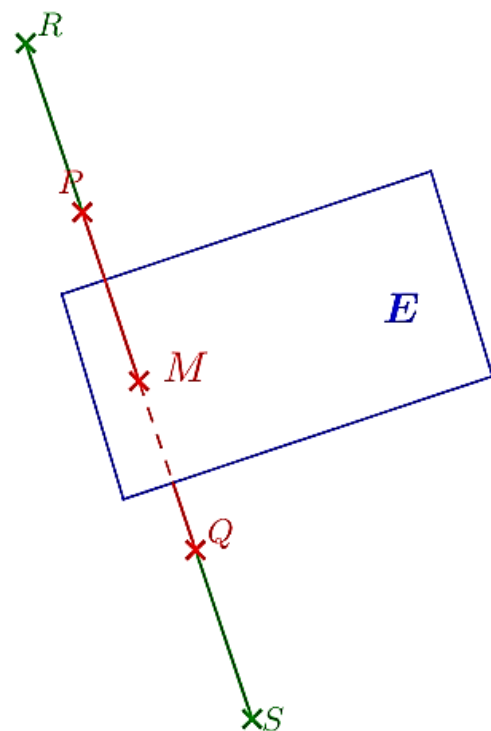
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{MQ}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 7-4 \\ 2-2 \\ 11-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind

$$R(-2|2|-1)$$



Powered by GEOGEBRA

Lösung Aufgabensatz 2/22 A5

$$E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \quad g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Orthogonalitätsbedingung: $\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 2a - 15 + 16 = 0$$

$$2a = -1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$g_{-\frac{1}{2}}$ steht senkrecht auf E .

b) Koordinatengleichung der x_1x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Bestimmung von P_a :

Aus g_a folgt:

$$x_2 = 5 - 5t$$

$$x_2 \rightarrow E$$

$$5 - 5t = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_a \in E$$

$$x_1 = -1 + a; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -1$$

$$2 \cdot (-1 + a) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) = 12$$

$$-2 + 2a + 4 = 12$$

$$2a = 10$$

$$a = 5$$

$$P_5 \in E.$$

Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2022
 Lösung Aufgabensatz 2/22 A6

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

- a) Wenn A zum Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand hat, dann steht $\overline{AB} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ -1 - (-3) \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 8 - 4 = 0$$

$A \in g$ hat den kleinsten Abstand zu B .

- b) Gemäß Aufgabenteil a) ist $|\overline{AB}|$ der Abstand der beiden Geraden.

Wir bestimmen den Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} .

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 + 0 \\ -3 - 1 \\ 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Ebene verläuft durch diesen Mittelpunkt und

hat den Vektor $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor.

$$E: -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = d \quad \text{Punktprobe mit } M(2|-2|2)$$

$$-4 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = d$$

$$d = -4$$

$$E: -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \quad | :(-2)$$

$$E: 2x_1 - x_2 - x_3 = 2$$