Lösung Aufgabensatz 1/22 A5

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ und $E\colon 3x_1 - x_3 = -2$

a) Richtungsvektor Gerade $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$.

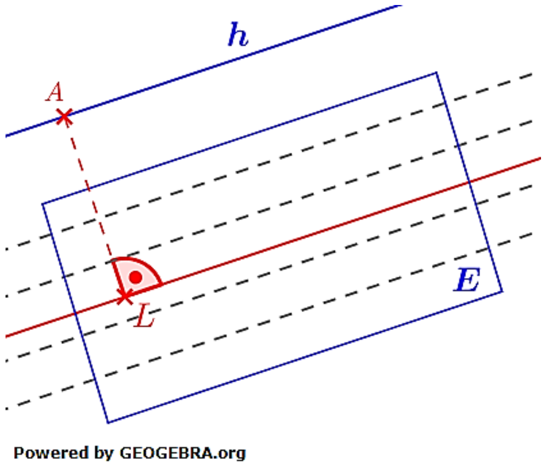
Normalenvektor Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

Wegen $\vec{u} = \overrightarrow{n_E}$ ist g orthogonal zu E.

b) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R} \parallel E$ wegen $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = 0$

Gesucht ist die Gerade in E, die senkrecht unter der Geraden h liegt.
Wir bilden eine Hilfsgerade j durch den Aufpunkt von h mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.

$j\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$



Wir schneiden diese Gerade mit der Ebene E und erhalten dadurch den Lotfußpunkt L.
Aus f folgt:

$x_1 = 7 + 3r$
$x_3 = 3 - r$
$x_1; x_3 \to E$
$3 \cdot (7 + 3r) - (3 - r) = -2$
$21 + 9r - 3 + r = -2$
$10r = -20$
$r = -2$
$r \to j$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

Der Lotfußpunkt wird zum Aufpunkt der gesuchten Gerade.

$i\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Lösung Aufgabensatz 1/22 A6

$P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt ergibt $Q(7|2|11)$.

a) Die Ebene an der gespiegelt wird, muss in der Mitte der Strecke $\overline{PQ}$ liegen. Der Mittelpunkt der Strecke sei M.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+7 \\ 2+2 \\ 3+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$M \in E$. Der Normalenvektor von E ist der Vektor $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-2 \\ 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

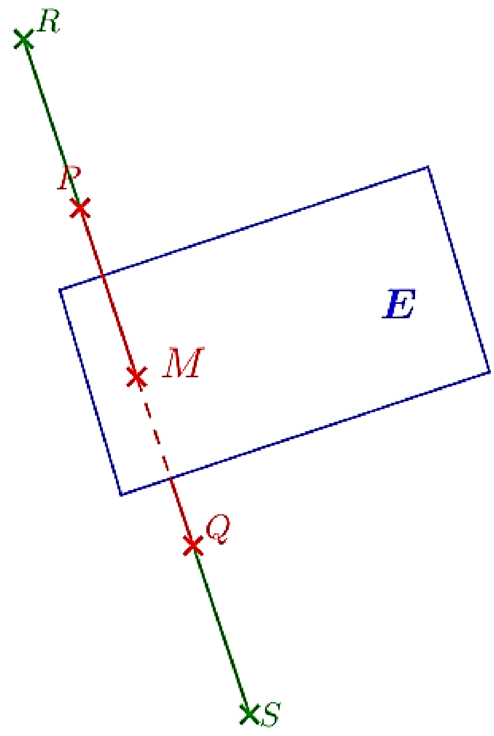
$3x_1 + 4x_3 = d$ | Punktprobe mit M

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = d$

$d = 40$

Die Spiegelebene hat die Gleichung $3x_1 + 4x_3 = 40$

b) Die Grafik verdeutlicht die Situation.



Powered by GEOGEBRA

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{RP}$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{2 \cdot MQ}$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7-4 \\ 2-2 \\ 11-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{2 \cdot MQ}$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 7-4 \\ 2-2 \\ 11-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind $R(-2|2|-1)$

Lösung Aufgabensatz 2/22 A5

$E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \quad g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \ t \in \ \mathbb{R}$

a) Orthogonalitätsbedingung: $\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 2a - 15 + 16 = 0$

$2a = -1$

$a = -\frac{1}{2}$

$g_{-\frac{1}{2}}$ steht senkrecht auf E.

b) Koordinatengleichung der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Bestimmung von P_a:

Aus g_a folgt:

$x_2 = 5 - 5t$

$x_2 \to E$

$5 - 5t = 0 \ \Rightarrow \ t = 1$

$\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P_a \in E$

$x_1 = -1 + a; \ x_2 = 0; \ x_3 = -1$

$2 \cdot (-1 + a) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) = 12$

$-2 + 2a + 4 = 12$

$2a = 10$

$a = 5$

$P_5 \in E$.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A6

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$.

a) Wenn A zum Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand hat, dann steht $\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ -1-(-3) \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 8 - 4 = 0$

$A \in g$ hat den kleinsten Abstand zu B.

b) Gemäß Aufgabenteil a) ist $|\overrightarrow{AB}|$ der Abstand der beiden Geraden.

Wir bestimmen den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4+0 \\ -3-1 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die gesuchte Ebene verläuft durch diesen Mittelpunkt und hat den Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor.

$E\colon -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = d$ Punktprobe mit $M(2|-2|2)$

$-4 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = d$

$d = -4$

$E\colon -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \quad | \quad :(-2)$

$E\colon 2x_1 - x_2 - x_3 = 2$