Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2023

Aufgabensatz 1/23 A4

Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass g in der Ebene $E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

b) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A5

Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r; s \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass g und h nicht identisch sind.

b) Die Gerade g soll durch Spiegelung an einer Ebene auf die Gerade h abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A4

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden.

Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

(Quelle Abitur BW 2023)

Lösung Aufgabensatz 1/23 A4

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

$E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 2$

Aus der Geradengleichung folgt:

$x_1 = t$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1 - t$

$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E$

$t + 1 + 1 - t = 2$

$2 = 2$

Die Geraden g liegt in der Ebene E.

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

$h_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$

$g \cap h_a$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad | \quad -s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad | \quad -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $t - s = 0$

(2) $-as = -1$

(3) $-t = 0$ ➔ $t = 0$

$t \rightarrow (1)$

(1) $0 - s = 0$ ➔ $s = 0$

$s \rightarrow (2)$

(2) $-a \cdot 0 = -1$

$0 = 1$ ➔ Widerspruch

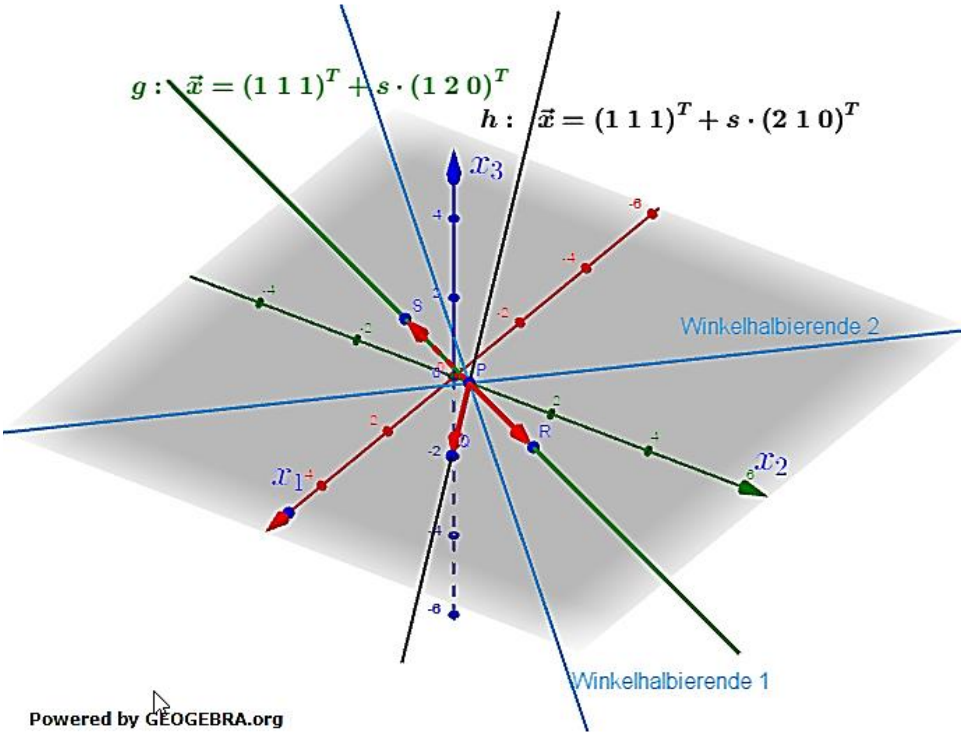
Das LGS hat für alle a keine Lösung. Die beiden Geraden sind für alle a windschief.

Lösung Aufgabensatz 1/23 A5

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix};\ \ r;s\in\mathbb{R}$$

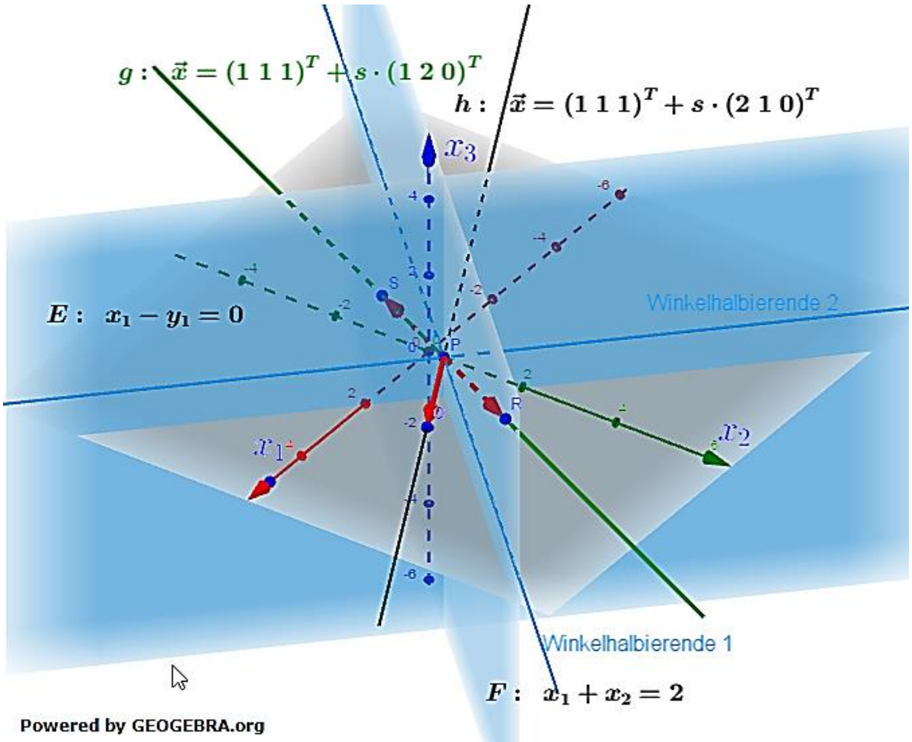
a) Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sind keine Vielfachen voneinander. Deshalb sind die beiden Geraden nicht identisch.

b) g und h schneiden sich im Aufpunkt $P(1|1|1)$. Somit liegt dieser Punkt auch in der gesuchten Ebene.
Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation:



Abituraufgaben Leistungskurs Pflichtteil Analytische Geometrie 2023

Die Gerade g kann an zwei Ebenen gespiegelt werden. Die Ebenen verlaufen durch den Punkt $P(1|1|1)$ end enthalten jeweils die Gerade der Winkelhalbierenden der Richtungsvektoren von g und h.



a Dabei ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 1 gleich Normalenvektor der Ebene E und der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 2 ist Normalenvektor von F (siehe Grafik).

Da die beiden Richtungsvektoren der Geraden g und h gleiche Länge besitzen $\left(\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5};\ \left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}\right)$, wird der Normalenvektor von E über $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ und der von F über $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ermittelt.

Bestimmung von E:

$3x_1 + 3x_2 = d$

Punktprobe mit $P(1|1|1)$

$3 + 3 = d$

$d = 6$

$3x_1 + 3x_2 = 6 \qquad | \quad :3$

$E\colon\ x_1 + x_2 = 2$

Bestimmung von F:

$x_1 - x_2 = d$

Punktprobe mit $P(1|1|1)$

$1 * 1 = d$

$d = 0$

F: $x_1 - x_2 = 0$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A4

a) Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Prüfung, ab $A(3|5|5)$ auf g liegt:

$\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

(1) $3 = 1 + r$ ➔ $r = 2$

(2) $5 = 1 + 2r$ ➔ $r = 2$

(3) $5 = 1 + 2r$ ➔ $r = 2$

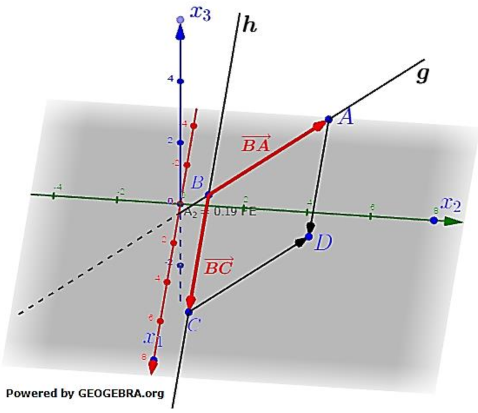
Der Punkt $A(3|5|5)$ auf g.

b) Geradengleichung h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Schnittpunkt der beiden Geraden ist B (Aufgabenstellung).

$\overrightarrow{BA}$ = Rauten-Seite.

$|\overrightarrow{BA}| = \left|\begin{pmatrix}3-1\\5-1\\5-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$



Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ auf h muss genauso lang sein.

C auf h hat die Koordinaten $C(1+r|1|1)$

$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}1+r-1\\1-1\\1-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right| = r = 6$

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\\5\end{pmatrix}$

Koordinaten der Punkte $C(7|1|1)$ und $D(9|5|5)$