

Lösung Aufgabensatz 1/23 A4

a)  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

$E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$

Aus der Geradengleichung folgt:

$x_1 = t$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1 - t$

$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E$

$t + 1 + 1 - t = 2$

$2 = 2$

Die Geraden  $g$  liegt in der Ebene  $E$ .

b)  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

$g \cap h_a$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad -s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1)  $t - s = 0$

(2)  $-as = -1$

(3)  $-t = 0 \rightarrow t = 0$

$t \rightarrow (1)$

(1)  $0 - s = 0 \rightarrow s = 0$

$s \rightarrow (2)$

(2)  $-a \cdot 0 = -1$

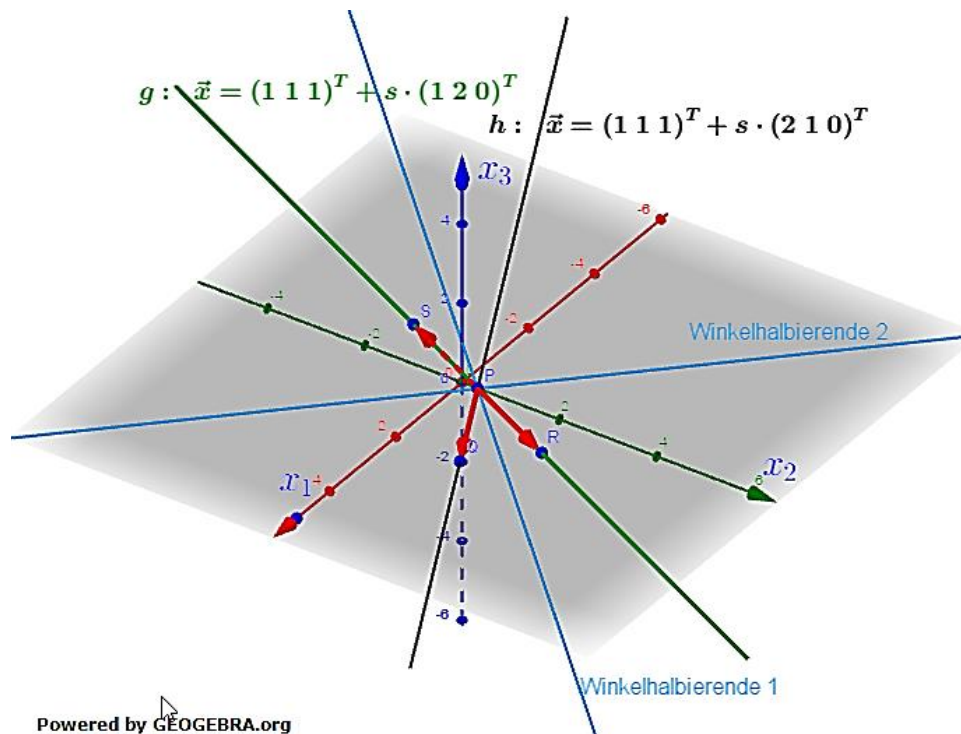
$0 = 1 \rightarrow$  Widerspruch

Das LGS hat für alle  $a$  keine Lösung. Die beiden Geraden sind für alle  $a$  windschief.

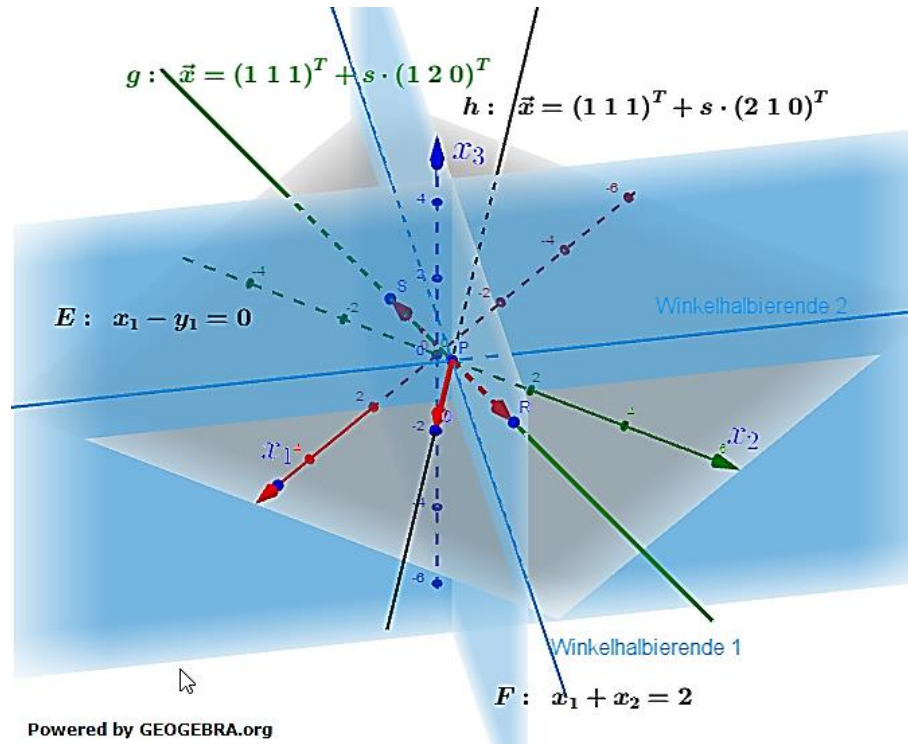
Lösung Aufgabensatz 1/23 A5

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

- a) Die beiden Richtungsvektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sind keine Vielfachen voneinander. Deshalb sind die beiden Geraden nicht identisch.
- b)  $g$  und  $h$  schneiden sich im Aufpunkt  $P(1|1|1)$ . Somit liegt dieser Punkt auch in der gesuchten Ebene.  
 Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation:



Die Gerade  $g$  kann an zwei Ebenen gespiegelt werden. Die Ebenen verlaufen durch den Punkt  $P(1|1|1)$  und enthalten jeweils die Gerade der Winkelhalbierenden der Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$ .



- a) Dabei ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 1 gleich Normalenvektor der Ebene  $E$  und der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 2 ist Normalenvektor von  $F$  (siehe Grafik).

Da die beiden Richtungsvektoren der Geraden  $g$  und  $h$  gleiche Länge besitzen ( $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$ ;  $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$ ), wird der Normalenvektor von  $E$  über

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und der von } F \text{ über } \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ermittelt.}$$

Bestimmung von  $E$ :

$$3x_1 + 3x_2 = d$$

Punktprobe mit  $P(1|1|1)$

$$3 + 3 = d$$

$$d = 6$$

$$3x_1 + 3x_2 = 6 \quad | :3$$

$$E: x_1 + x_2 = 2$$

Bestimmung von  $F$ :

$$x_1 - x_2 = d$$

Punktprobe mit  $P(1|1|1)$

$$1 * 1 = d$$

$$d = 0$$

$$F: x_1 - x_2 = 0$$

### Lösung Aufgabensatz 2/23 A4

a) Geradengleichung  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Prüfung, ob  $A(3|5|5)$  auf  $g$  liegt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1)  $3 = 1 + r \rightarrow r = 2$

(2)  $5 = 1 + 2r \rightarrow r = 2$

(3)  $5 = 1 + 2r \rightarrow r = 2$

Der Punkt  $A(3|5|5)$  auf  $g$ .

b) Geradengleichung  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der beiden Geraden ist  $B$   
 (Aufgabenstellung).

$\vec{BA}$  = Rauten-Seite.

$$|\vec{BA}| = \left| \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

Der Vektor  $\vec{BC}$  auf  $h$  muss genauso lang sein.

$C$  auf  $h$  hat die Koordinaten  $C(1+r|1|1)$

$$|\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 1+r-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = r = 6$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der Punkte  $C(7|1|1)$  und  $D(9|5|5)$

