

Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2021-1 BW

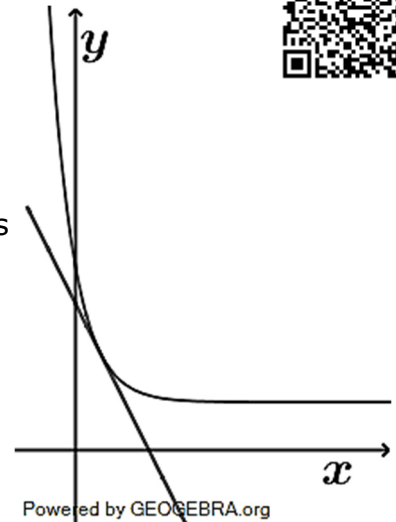


Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

- Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

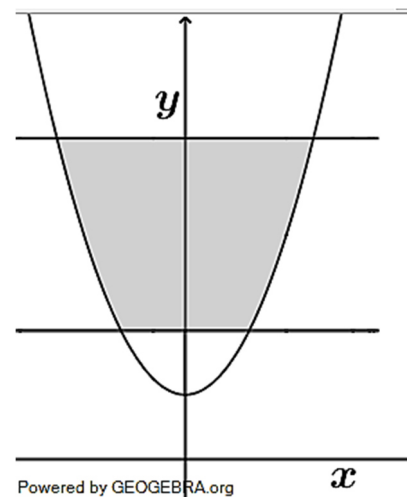
(Quelle Abitur BW 2021 Aufgabensatz 1)



Aufgaben A2

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden $g: y = 2$ und $h: y = 5$. Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

(Quelle Abitur BW 2021 Aufgabensatz 1)



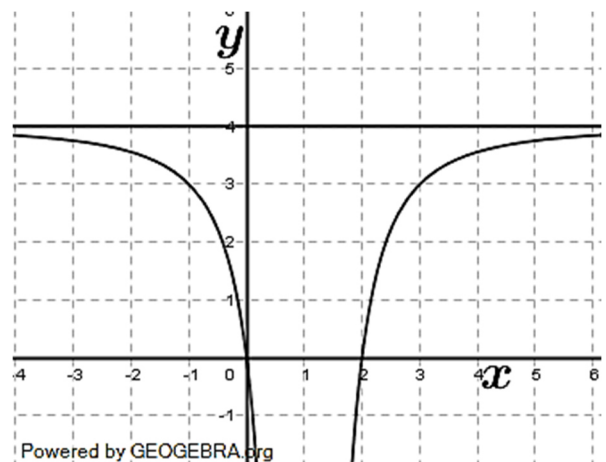
Aufgabe A3

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = a + \frac{b}{x^2+c}$ und $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$.

Die Abbildung zeigt den Graphen einer der beiden Funktionen sowie seine Asymptoten.

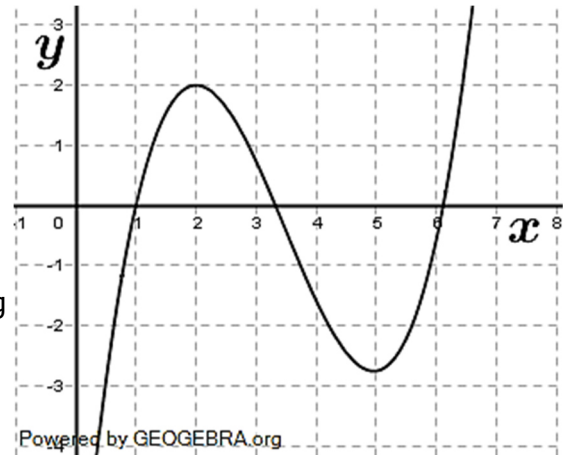
- Begründen Sie, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann.
- Bestimmen Sie für die Funktion g die Werte von a , b und c .

(Quelle Abitur BW 2021 Aufgabensatz 1)



Aufgabe A4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f . Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = f(x) + 5x$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.



- (1) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall $[0,5;4]$ genau ein lokales Maximum.
- (2) Die Funktion g ist im Intervall $[1;6]$ streng monoton steigend.

(Quelle Abitur BW 2021 Aufgabensatz 1)

Aufgabe A5

Gegeben sind die Ebenen E und F sowie die Ebenenschar G_r ($r \in \mathbb{R}$).

$$E: x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$$

$$F: 2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$G_r: 9x_2 + 3x_3 = r + 11$$

- a) Stellen Sie die Ebene G_7 in einem Koordinatensystem dar.
- b) Für einen Wert von r besitzen E , F und G_r eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimmen Sie diesen Wert von r .

(Quelle Abitur BW 2021 Aufgabensatz 1)

Aufgabe A6

Gegeben sind der Punkt $P(-1|1|-1)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

Der Punkt $Q(3|3|3)$ liegt auf der Geraden g .

- a) Zeigen Sie, dass Q derjenige Punkt auf g ist, der zu P den kleinsten Abstand hat.
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R auf der Geraden g , für den das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 hat.

(Quelle Abitur BW 2021 Aufgabensatz 1)

Aufgabe A7

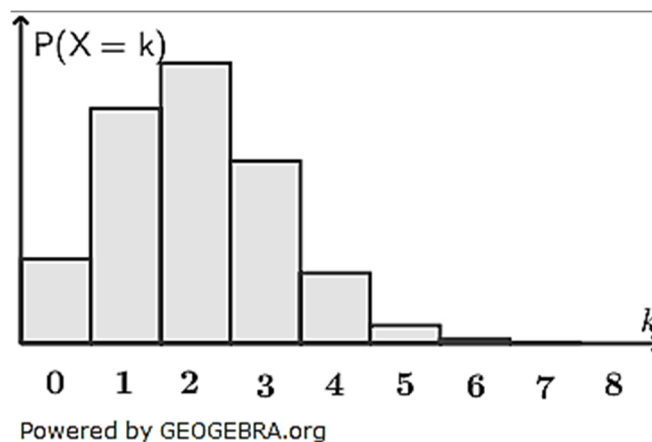
In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, dabei zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe zu ziehen. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne.

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabe A8

- a) Die Abbildung stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X dar. Begründen Sie, dass $P(X = 2) < 0,5$ gilt.



- b) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 8$ und $0 < p < 1$ gilt: $P(Y = 1) = 2 \cdot P(Y = 0)$. Berechnen Sie den Wert von p .

(Quelle Abitur BW 2021)

Lösung A1

$$f(x) = e^{-2x+1} + 1$$

- a) Nachweis der Steigung -2 der Tangente in $x_0 = \frac{1}{2}$.

Wir benötigen hierzu $f'(x)$:

$$f'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{-2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = -2 \cdot e^0 = -2$$

- b) Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

Wir benötigen die Tangentengleichung:

$$t(x) = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2 \cdot \frac{1}{2} + 1} + 1 = 2$$

$$t(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$$

$$t(x) = -2x + 3$$

Schnittpunkt mit der x -Achse:

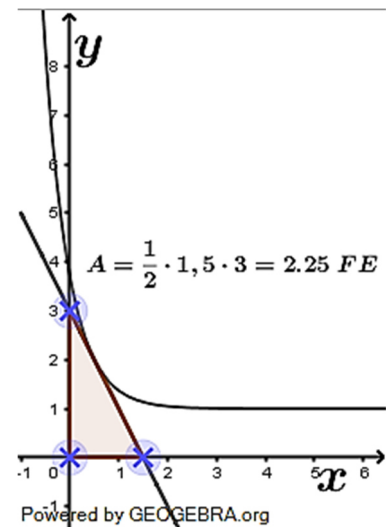
$$t(x) = 0 = -2x + 3 \rightarrow x = 1,5$$

Schnittpunkt mit der y -Achse:

$$t(0) = 3$$

Fläche des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ FE}$$



Lösung A2

f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden $g: y = 2$ und $h: y = 5$.

Der Flächeninhalt berechnet sich über das Integral zwischen oberer Kurve h und unterer Kurve f (blaugekennzeichnete Fläche). Darin ist jedoch die Fläche enthalten zwischen oberer Kurve g und unterer Kurve f (rot schraffierte Fläche), sodass diese wieder abgezogen werden muss.

Wir benötigen zunächst die Schnittpunkte von h und f sowie von g und f :

$f \cap h$:

$$1 + x^2 = 5 \quad | \quad -1$$

$$x^2 = 4 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

$f \cap g$:

$$1 + x^2 = 2 \quad | \quad -1$$

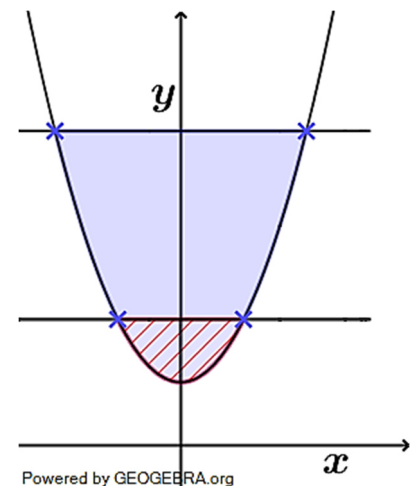
$$x^2 = 1 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^2 (h - f(x)) dx - \int_0^1 (g - f(x)) dx \right)$$

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_0^1 (1 - x^2) dx \right) = 2 \cdot \left(\left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 - \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \right)$$

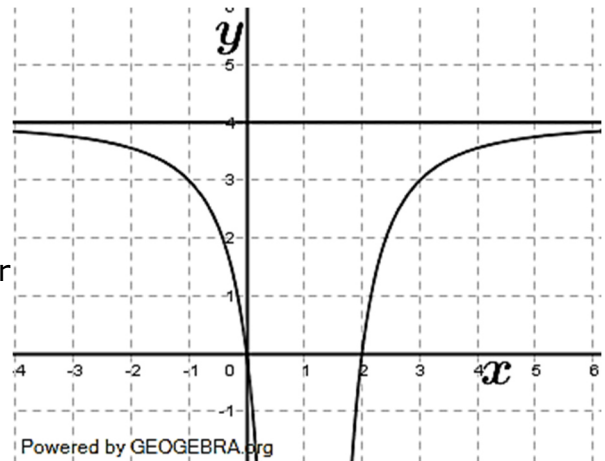
$$A = 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) = 2 \cdot \left(7 - \frac{7}{3} \right) = \frac{28}{3} \text{ FE}$$



Lösung A3

$$f(x) = a + \frac{b}{x^2+c} \text{ und } g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}.$$

- a) Begründung, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann:
Für f ergeben sich wegen $x^2 + c$ im Nenner zwei Pole für $x = \pm c \wedge c < 0$.
Für $c > 0$ existiert kein Pol.
Der dargestellte Graph hat jedoch nur eine senkrechte Asymptote $x = 1$.
- b) Bestimmung von a , b und c für g :
Aus a) folgt bereits $c = -1$.



Wegen der waagrechten Asymptote $y = 4$ ist $a = 4$.

Mit einer Punktprobe mit $g(0) = 0$ erhalten wir:

$$4 + \frac{b}{(0-1)^2} = 0$$

$$4 + b = 0$$

$$b = -4$$

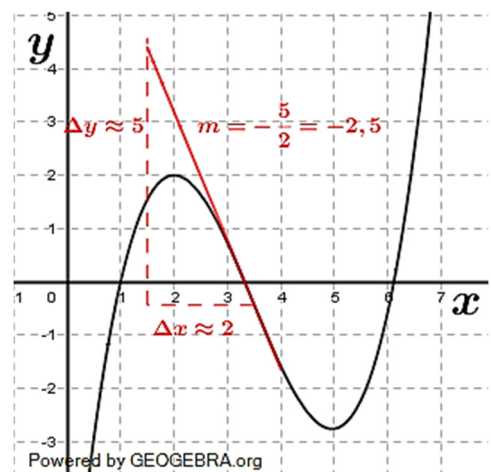
$$g(x) = 4 - \frac{4}{(x-1)^2}$$

Lösung A4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f . Die Funktion g ist gegeben durch

$$g(x) = f(x) + 5x.$$

- (1) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall $[0,5; 4]$ genau ein lokales Maximum.
Die Aussage ist richtig. f hat bei $x = 1$ eine Nullstelle mit VZW von „-“ nach „+“; somit hat F in $x = 1$ ein Minimum. f hat bei $x \approx 3,3$ eine Nullstelle mit VZW von „+“ nach „-“; somit hat F in $x = 3,3$ ein Maximum. F ist mindestens vom Grad 4 und für $x \rightarrow |\infty|$ verläuft $F \rightarrow \infty$. Damit ist das Maximum ein lokales Maximum.



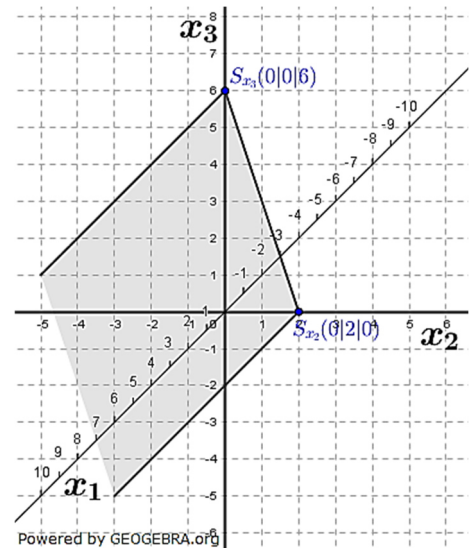
- (2) Die Funktion g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.
Die Aussage ist richtig, wenn $g'(x)$ im Intervall $[1; 6]$ größer 0 ist.
 f hat einen Wendepunkt mit (stärkster) negativer Steigung bei $x = 3,5$. Wir legen eine Tangente an den Graphen von f und bestimmen die dortige Steigung mit etwa $-2,5$ (siehe Grafik).
Wir bilden $g'(3,5) = -2,5 + 5 = 2,5$. Somit ist g im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.

Lösung A5

$G_7: 9x_2 + 3x_3 = 18$

- a) Zum Zeichnen der Ebene benötigen wir deren Spurpunkte.

$S_{x_2}(0|2|0); S_{x_3} = (0|0|6)$



- b) Zur Bestimmung einer gemeinsamen Schnittgeraden stellen wir eine Gauß-Matrix auf.

$$x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$9x_2 + 3x_3 = r + 11$$

Gauß-Matrix:

x_1	x_2	x_3	=
1	-5	-2	6
2	-1	-1	3
0	9	3	$r + 11$

$II - 2 \cdot I$ ←

1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	9	3	$r + 11$

$III - II$ ←

1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	0	0	$r + 11$

Aus (III) folgt: $r + 11 = 0 \rightarrow r = -11$

Für $r = -11$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, d.h., die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Lösung A6

- a) Hat P zu Q den kleinsten Abstand zu g , so muss der Vektor \overrightarrow{PQ} senkrecht auf dem Richtungsvektor von g stehen.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{rv_g} \rightarrow P$ hat zu Q den kleinsten Abstand von g .

- b) Das Dreieck PQR ist bei Q rechtwinklig. Somit gilt für die Fläche dieses Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}|$.

Wir bilden den Vektor \overrightarrow{QR} :

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 + t - 3 \\ -1 + 2t - 3 \\ 7 - 2t - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + t \\ -4 + 2t \\ 4 - 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(t-2)^2 + (2t-4)^2 + (4-2t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + 16 - 16t + 4t^2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{9t^2 - 36t + 36} = 3 \cdot \sqrt{9(t^2 - 4t + 4)} = 9 \cdot \sqrt{(t-2)^2} \\ &= 9 \cdot (t-2) \end{aligned}$$

Die Fläche soll betragen.

$$9 \cdot (t-2) = 27$$

$$t-2 = 3 \rightarrow t = 5$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt R hat die Koordinaten $R(7|9|-3)$.

Lösung A7

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen mit 4 schwarzen Kugeln und x weißen Kugeln.

$$P(\text{schwarz}) = \frac{4}{4+x}, \quad P(\text{weiß}) = \frac{x}{4+x}$$

$$P(\text{schwarz}; \text{schwarz}) = \frac{4}{4+x} \cdot \frac{4}{4+x} = \frac{16}{(4+x)^2}$$

$$P(\{\text{schwarz}; \text{weiß}\}; \{\text{weiß}; \text{schwarz}\}) = 2 \cdot \frac{4}{4+x} \cdot \frac{x}{4+x} = \frac{8x}{(4+x)^2}$$

$$P(\text{schwarz}; \text{schwarz}) = 2 \cdot P(\{\text{schwarz}; \text{weiß}\}; \{\text{weiß}; \text{schwarz}\})$$

$$\frac{16}{(4+x)^2} = 2 \cdot \frac{8x}{(4+x)^2}$$

$$\frac{16}{(4+x)^2} = \frac{16x}{(4+x)^2}$$

$$16x = 16 \rightarrow x = 1$$

In der Urne befindet sich eine weiße Kugel.

Lösung A8

a) $P(X = 2) < 0,5$, da alleine die Summe von $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 3)$ und $P(X = 4)$ größer ist als $P(X = 2)$. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist jedoch die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse stets 1.

$$\text{b) } P(Y = 1) = \binom{8}{1} \cdot p \cdot (1 - p)^7 = 8p \cdot (1 - p)^7$$

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^8 = (1 - p)^8$$

$$P(Y = 1) = 2 \cdot P(Y = 0)$$

$$8p \cdot (1 - p)^7 = 2 \cdot (1 - p)^8 \quad | \quad : (1 - p)^7$$

$$8p = 2 - 2p$$

$$10p = 2$$

$$p = \frac{1}{5}$$