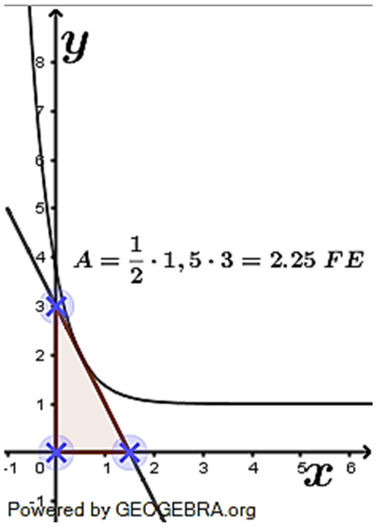
Lösung A1

$f(x) = e^{-2x+1} + 1$

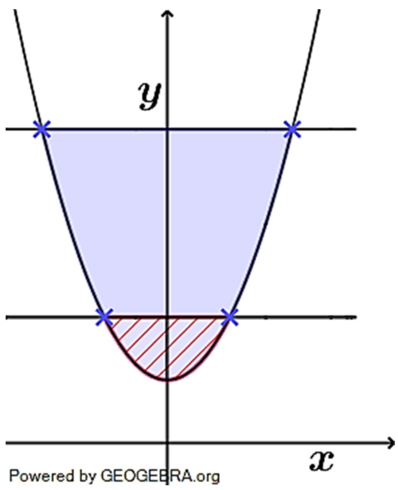


a) Nachweis der Steigung -2 der Tangente in $x_0 = \frac{1}{2}$.
Wir benötigen hierzu $f'(x)$:
$f'(x) = -2e^{-2x+1}$.
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{-2\cdot\frac{1}{2}+1} = -2 \cdot e^0 = -2$

b) Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.
Wir benötigen die Tangentengleichung:
$t(x) = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2\cdot\frac{1}{2}+1} + 1 = 2$
$t(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$
$t(x) = -2x + 3$
Schnittpunkt mit der x-Achse:
$t(x) = 0 = -2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5$
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$t(0) = 3$
Fläche des Dreiecks:
$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 2{,}25\ FE$

Lösung A2

f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden $g\colon\ y = 2$ und $h\colon\ y = 5$.



Der Flächeninhalt berechnet sich über das Integral zwischen oberer Kurve h und unterer Kurve f (blaugekennzeichnete Fläche). Darin ist jedoch die Fläche enthalten zwischen oberer Kurve g und unterer Kurve f (rot schraffierte Fläche), sodass diese wieder abgezogen werden muss.
Wir benötigen zunächst die Schnittpunkte von h und f sowie von g und f:

$f \cap h$:
$1 + x^2 = 5 \quad | \quad -1$
$x^2 = 4 \quad | \quad \sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 2$

$f \cap g$:
$1 + x^2 = 2 \quad | \quad -1$
$x^2 = 1 \quad | \quad \sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 1$

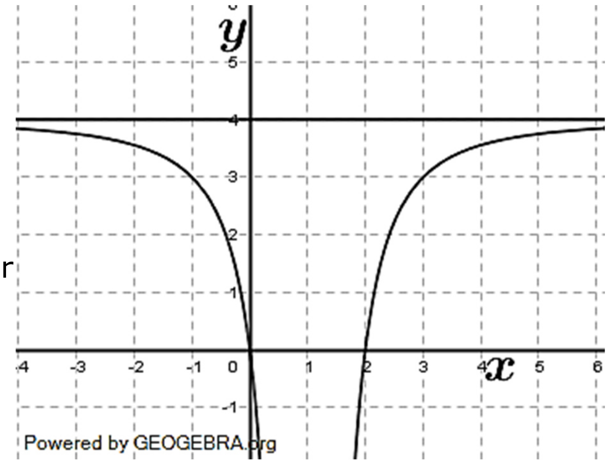
$A = 2 \cdot (\int_0^2 (h - f(x))dx - \int_0^1 (g - f(x))dx)$

$A = 2 \cdot (\int_0^2 (4 - x^2)\,dx - \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 2 \cdot \left(\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 - \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right)$

$A = 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = 2 \cdot \left(7 - \frac{7}{3}\right) = \frac{28}{3}\ FE$

Lösung A3

$f(x) = a + \frac{b}{x^2+c}$ und $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$.



a) Begründung, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann:
Für f ergeben sich wegen $x^2 + c$ im Nenner zwei Pole für $x = \pm c \wedge c < 0$.
Für $c > 0$ existiert kein Pol.
Der dargestellte Graph hat jedoch nur eine senkrechte Asymptote $x = 1$.

b) Bestimmung von a, b und c für g:
Aus a) folgt bereits $c = -1$.
Wegen der waagrechten Asymptote $y = 4$ ist $a = 4$.
Mit einer Punktprobe mit $g(0) = 0$ erhalten wir:

$4 + \frac{b}{(0-1)^2} = 0$

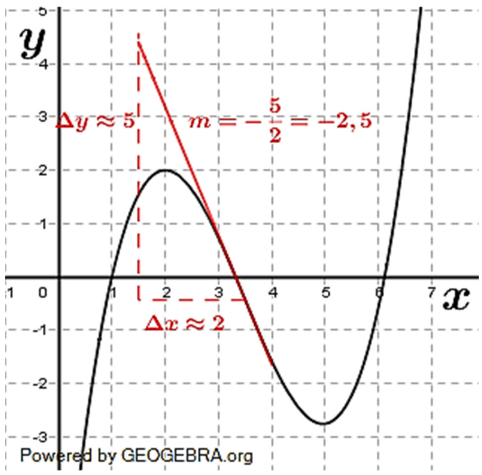
$4 + b = 0$

$b = -4$

$g(x) = 4 - \frac{4}{(x-1)^2}$

Lösung A4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Die Funktion g ist gegeben durch
$g(x) = f(x) + 5x$.



(1) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall $[0{,}5; 4]$ genau ein lokales Maximum.
Die Aussage ist richtig. f hat bei $x = 1$ eine Nullstelle mit VZW von „-„ nach „+“; somit hat F in $x = 1$ ein Minimum. f hat bei $x \approx 3{,}3$ eine Nullstelle mit VZW von „+„ nach „-“; somit hat F in $x = 3{,}3$ ein Maximum. F ist mindestens vom Grad 4 und für $x \to |\infty|$ verläuft $F \to \infty$. Damit ist das Maximum ein lokales Maximum.

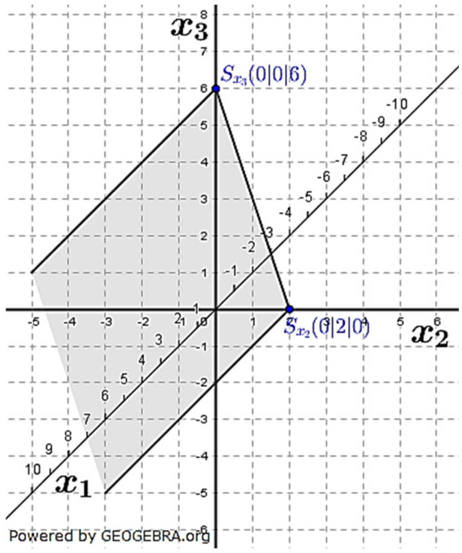
(2) Die Funktion g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.
Die Aussage ist richtig, wenn $g'(x)$ im Intervall $[1; 6]$ größer 0 ist.
f hat einen Wendepunkt mit (stärkster) negativer Steigung bei $x = 3{,}5$. Wir legen eine Tangente an den Graphen von f und bestimmen die dortige Steigung mit etwa $-2{,}5$ (siehe Grafik).
Wir bilden $g'(3{,}5) = -2{,}5 + 5 = 2{,}5$. Somit ist g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.

Lösung A5

G_7: $\quad 9x_2 + 3x_3 = 18$

a) Zum Zeichnen der Ebene benötigen wir deren Spurpunkte.

$S_{x_2}(0|2|0)$; $\quad S_{x_3} = (0|0|6)$



b) Zur Bestimmung einer gemeinsamen Schnittgeraden stellen wir eine Gauß-Matrix auf.

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ 9x_2 + 3x_3 &= r + 11 \end{aligned}$$

Gauß-Matrix:

x_1	x_2	x_3	$=$	
1	-5	-2	6	
2	-1	-1	3	$II - 2 \cdot I$
0	9	3	$r+11$	

x_1	x_2	x_3	$=$	
1	-5	-2	6	
0	9	3	-9	
0	9	3	$r+11$	$III - II$

x_1	x_2	x_3	$=$
1	-5	-2	6
0	9	3	-9
0	0	0	$r+11$

Aus (III) folgt: $r + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -11$

Für $r = -11$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, d.h., die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Lösung A6

a) Hat P zu Q den kleinsten Abstand zu g, so muss der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von g stehen.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 3-1 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{rv_g}$ ➔ P hat zu Q den kleinsten Abstand von g.

b) Das Dreieck PQR ist bei Q rechtwinklig. Somit gilt für die Fläche dieses Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}|$.

Wir bilden den Vektor $\overrightarrow{QR}$:

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1+t-3 \\ -1+2t-3 \\ 7-2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+t \\ -4+2t \\ 4-2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(t-2)^2 + (2t-4)^2 + (4-2t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + 16 - 16t + 4t^2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{9t^2 - 36t + 36} = 3 \cdot \sqrt{9(t^2 - 4t + 4)} = 9 \cdot \sqrt{(t-2)^2} \\ &= 9 \cdot (t-2) \end{aligned}$$

Die Fläche soll betragen.

$9 \cdot (t-2) = 27$

$t - 2 = 3$ ➔ $t = 5$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt R hat die Koordinaten $R(7|9|-3)$.

Lösung A7

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen mit 4 schwarzen Kugeln und x weißen Kugeln.

$P(schwarz) = \frac{4}{4+x}$. $P(weiß) = \frac{x}{4+x}$.

$P(schwarz; schwarz) = \frac{4}{4+x} \cdot \frac{4}{4+x} = \frac{16}{(4+x)^2}$

$P(\{schwarz; weiß\}; \{weiß; schwarz\}) = 2 \cdot \frac{4}{4+x} \cdot \frac{x}{4+x} = \frac{8x}{(4+x)^2}$

$P(schwarz; schwarz) = 2 \cdot P(\{schwarz; weiß\}; \{weiß; schwarz\})$

$\frac{16}{(4+x)^2} = 2 \cdot \frac{8x}{(4+x)^2}$

$\frac{16}{(4+x)^2} = \frac{16x}{(4+x)^2}$

$16x = 16$ ➔ $x = 1$

In der Urne befindet sich eine weiße Kugel.

Lösung A8

a) $P(X=2)<0{,}5$, da alleine die Summe von $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=3)$ und $P(X=4)$ größer ist als $P(X=2)$. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist jedoch die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse stets 1.

b) $P(Y=1)=\binom{8}{1}\cdot p\cdot(1-p)^7=8p\cdot(1-p)^7$

$P(Y=0)=\binom{8}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^8=(1-p)^8$

$P(Y=1)=2\cdot P(Y=0)$

$8p\cdot(1-p)^7=2\cdot(1-p)^8 \qquad | \qquad :(1-p)^7$

$8p=2-2p$

$10p=2$

$p=\frac{1}{5}$