Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2021-2 BW

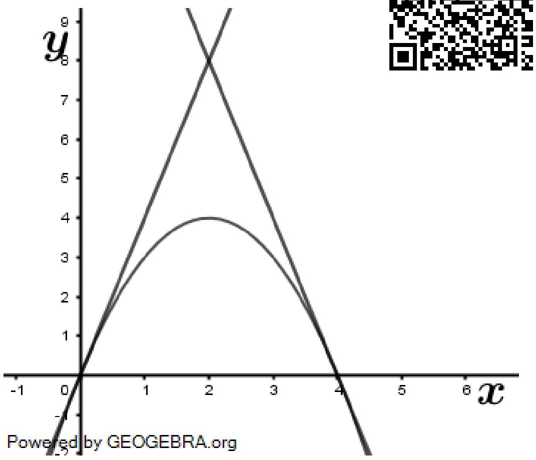
Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f sowie die Tangenten an G_f in den Schnittpunkten mit der x-Achse.

a) Weisen Sie nach: Die Tangente an G_f an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung 4.

b) Die beiden Tangenten schneiden sich in einem Punkt S. Berechnen Sie den Abstand des Punktes S vom Ursprung.

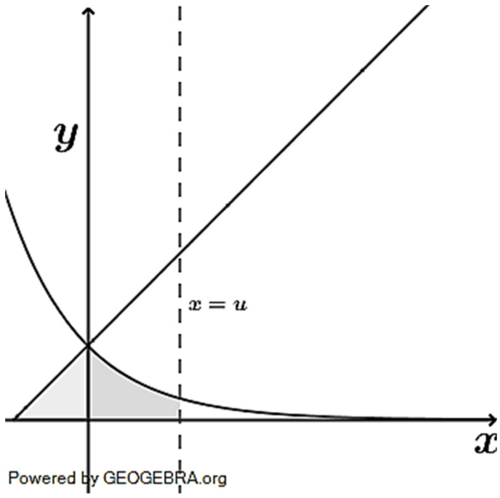
(Quelle Abitur BW 2021)



Aufgabe A2

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$, deren Schnittpunkt auf der y-Achse liegt. Die Graphen begrenzen mit der x-Achse und der Geraden $x = u$ $(u > 0)$ eine Fläche. Diese Fläche wird von der y-Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt.
Berechnen Sie den Wert von u.
Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

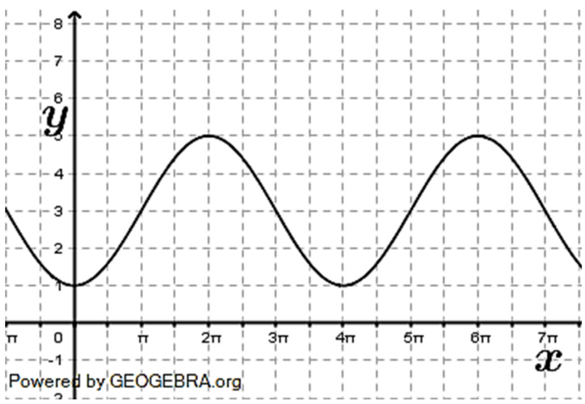
(Quelle Abitur BW 2021)



Aufgabe A3

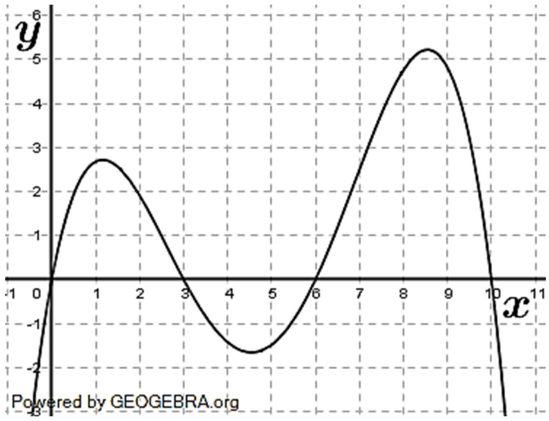
Die Abbildung zeigt den Graphen einer trigonometrischen Funktion.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

(Quelle Abitur BW 2021)



Aufgabe A4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



a) Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' im Intervall $[5;8]$ nicht monoton ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion I_2 mit $I_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt; 2 \leq x \leq 9$

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabe A5

Gegeben sind die Punkte $A(6|4|-1)$ und $B(0|-5|2)$ sowie die Ebene $E\colon\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

a) Die Gerade durch A und B schneidet E im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt S auf der Strecke AB liegt.

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabe A6

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 3x_2 - 4x_3 = 2$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

b) Die Ebene F ist orthogonal zu E und hat zur x_1-Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von F.

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabe A7

Ein Verein erhält eine Lieferung gebrauchter Computer und Bildschirme. Von den 10 Computern und 15 Bildschirmen funktionieren jeweils drei Geräte nicht. Jemand wählt zufällig einen Computer und einen Bildschirm aus.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide ausgewählten Geräte funktionieren.

b) Nach Inbetriebnahme der zwei ausgewählten Geräte stellt sich heraus, dass beide Geräte funktionieren. Anschließend wählt jemand aus den übrigen Geräten der Lieferung zwei Computer aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden zuletzt ausgewählten Computer funktioniert.

(Quelle Abitur BW 2021)

Aufgabe A8

Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Betrachtet wird die Anzahl der gewürfelten Sechsen.
Gegeben sind drei Terme:

$$\text{I:}\quad \left(\frac{1}{6}\right)^{11}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9}\qquad \text{II:}\quad \binom{20}{11}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9}\qquad \text{III:}\quad 1-\binom{20}{9}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{11}$$

a) Geben Sie an, mit welchem der drei Terme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es wird genau 11-mal eine Sechs gewürfelt.“ berechnet werden kann.

b) Formulieren Sie für jeden der beiden verbleibenden Terme ein Ereignis im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem jeweiligen Term berechnet werden kann.

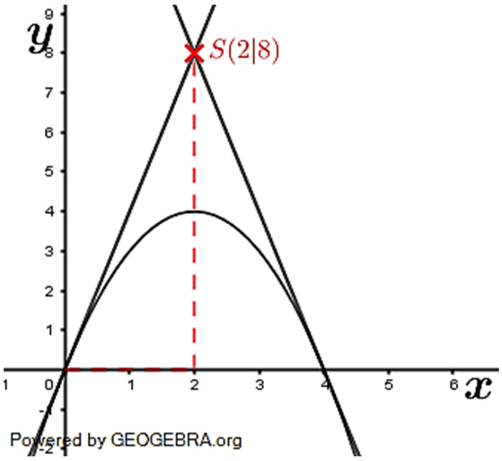
(Quelle Abitur BW 2021)

Lösung A1

$f(x) = 4x - x^2$.

a) Wir berechnen $f'(0)$:
$f'(x) = 4 - 2x$
$f'(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$ **q.e.d.**

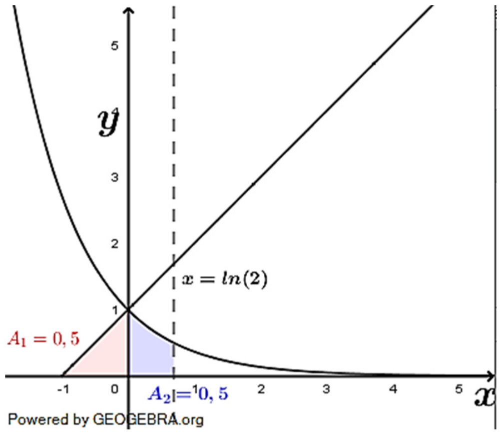
b) Wir bilden zunächst die Tangentengleichung an f in $x = 0$.
$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$
$t(x) = 4x$
Da f eine achsensymmetrische Parabel zur Achse $x = 2$ ist, hat der Schnittpunkt die x-Kooridnate 2.
$t(2) = 4 \cdot 2 = 8$
$S(2|8)$



Abstand Punkt vom Ursprung mit dem Satz des Pythagoras:
$d(O;S) = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$
Der Punkt hat einen Abstand von $\sqrt{68}$ vom Ursprung.

Lösung A2

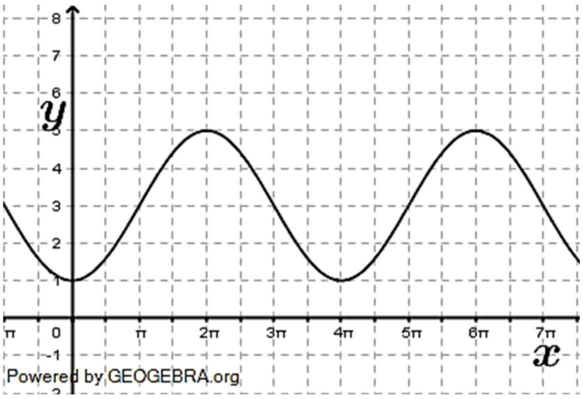
$f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$



Berechnung der Teilfläche A_1:
Die Teilfläche A_1 ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten-Längen 1.
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5\ FE$
Berechnung der Teilfläche A_2:
Die Teilfläche A_2 berechnet sich über das Integral unter f.
$A_2 = \int_0^u e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^u = -e^{-u} + 1$
$A_1 = A_2$
$-e^{-u} + 1 = 0{,}5$
$e^{-u} = 0{,}5 \qquad | \quad ln$
$-u = ln\,(0{,}5)$
$u = -\,ln(0{,}5) = ln\,(2)$
$A_2 = -e^{-\,ln(2)} + 1 = -\frac{1}{e^{ln(2)}} = -\frac{1}{2} + 1 = 0{,}5$
Gesamtfläche:
$A_{ges} = A_1 + A_2 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1\ FE$

Lösung A3

<u>Lösung 1:</u>



$f_1(x) = a \cdot \cos\big(b(x-c)\big) + d$

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

Die Kosinuskurve ist in x-Richtung nicht verschoben: ➔ $c = 0$

Die Kosinuskurve ist an der x-Achse gespiegelt: ➔ $a = -2$

Die Periode ist $p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 6\pi - 2\pi = 4\pi$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$f_1(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$

<u>Lösung 2:</u>

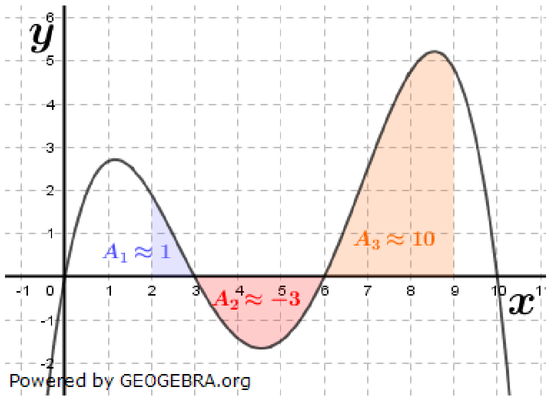
$f_2(x) = a \cdot sin\big(b(x-c)\big) + d$

a, b und d wie bei Lösung 1.

Die Sinuskurve ist in x-Richtung um π Einheiten nach rechts verschoben, somit $c = \pi$.

$f_2(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right) + 3$

Lösung A4



a) Begründung f' im Intervall $[5;8]$ nicht monoton:
f besitzt im Intervall einen Wendepunkt mit positiver Steigung, der in der ersten Ableitung zu einem Hochpunkt wird.

b) Nullstellen von $I_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt; 2 \leq x \leq 9$:
Die erste Nullstelle liegt bei $x = 2$ (untere Grenze der Integralfunktion) mit der Steigung $m = 2$.
Nun müssen wir Kästchen zählen, da eine Funktionsgleichung nicht gegeben ist.

$\int_2^2 f(t)\,dt \approx 1$

$\int_3^6 f(t)\,dt \approx -3$

$\int_6^9 f(t)\,dt \approx 10$

$\int_2^6 f(t)\,dt \approx 1 - 3 = -2$

Damit gibt es im Intervall $[2;6]$ eine Stelle x_1 mit $\int_2^{x_1} f(t)\,dt = 0$

$\int_3^9 f(t)\,dt \approx -3 + 10 = 7$

Damit gibt es im Intervall $[6;9]$ eine Stelle x_2 mit $\int_3^{x_2} f(t)\,dt = 0$

Die Integralfunktion hat in $2 \leq x \leq 9$ insgesamt 3 Nullstellen.

Lösung A5

$A(6|4|-1)$; $B(0|-5|2)$; $E\colon\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

a) Aufstellung der Geraden g:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$:

Aus g folgt:

$x_1 = 6 + 2t;\quad x_2 = 4 + 3t;\quad x_3 = -1 - t$

$E\colon\ 2 \cdot (6 + 2t) - 2 \cdot (4 + 3t) - 1 - t = 6$

$12 + 4t - 8 - 6t - 1 - t = 6$

$3 - 3t = 6$

$-3t = 3$

$t = -1$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(4|1|0)$.

b) $$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit S:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$4 = 6 - 6t$

$6t = 2$

$t = \frac{1}{3}$

Wegen $0 < t < 1$ liegt der Punkt S auf der Strecke AB.

Lösung A6

$E\colon\ 3x_2 - 4x_3 = 2$.

a) Die Ebene E verläuft parallel zur x_1-Achse, da in der Ebenengleichung die x_1-Koordinate fehlt.

b) Die Ebene F die senkrecht auf steht, muss den Normalenvektor $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

haben, denn $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Die Ebenengleichung lautet $F\colon\ 4x_2 + 3x_3 = d$

Die Ebene F soll einen Abstand von 10 zur x_1-Achse haben. Da F ebenfalls parallel zur x_1-Achse verläuft, hat jeder Punkt der x_1-Achse denselben Abstand, somit auch der Ursprung. Wir bestimmen den Parameter d über die HNF.

HNF von F:

$\frac{|4x_2+3x_3+d|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x_2+3x_3+d|}{5} = 0$

$d(0;F) = \frac{|d|}{5} = 2$

$|d| = 10$

$d_1 = 10;\quad d_2 = -10$

Es existieren somit zwei Ebenen, die die Aufgabenbedingung erfüllen.

$F_1 = 4x_2 + 3x_3 = 10;\quad F_1 = 4x_2 + 3x_3 = -10$

Lösung A7

A: Computer OK; B: Bildschirm OK

$P(A) = \frac{7}{10}$; $P(B) = \frac{12}{15}$.

a) $P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{12}{15} = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}$

b) Jetzt sind nur noch 9 Computer vorhanden, von denen 3 defekt sind.
C: Computer OK.
$P(C) = \frac{6}{9}$ im ersten Zug, da es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt.
D: Mindestens einer von zwei ausgewählten Computern ist OK.
E: Beide ausgewählte Computer sind defekt.
Wir berechnen das Gegenereignis, denn
$P(D) = 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 1 - \frac{6}{72} = \frac{66}{72} = \frac{11}{12}$

Lösung A8

a) Term Nummer II beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei 20 Würfen genau 11 Mal eine 6 zu werfen.

b) <u>Term Nummer I:</u>
Beim 20-maligen Werfen eines Würfels fällt bei den ersten 11 Würfen eine und 6 und danach keine 6 mehr.
<u>Term Nummer III:</u>
Beim 20-maligen Werfen eines Würfels fällt nicht genau 9 mal keine 6.
Alternativ:
Beim 20-maligen Werfen eines Würfels fällt nicht genau 11 mal eine 6.