Lösung A1

$f(x) = 4x - x^2$.

a) Wir berechnen $f'(0)$:

$f'(x) = 4 - 2x$

$f'(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$ **q.e.d.**

b) Wir bilden zunächst die Tangentengleichung an f in $x = 0$.

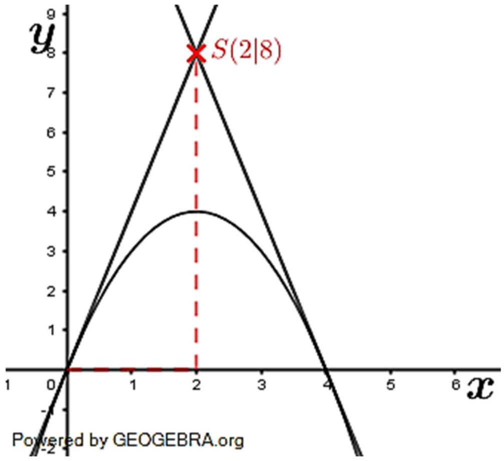
$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$t(x) = 4x$

Da f eine achsensymmetrische Parabel zur Achse $x = 2$ ist, hat der Schnittpunkt die x-Kooridnate 2.

$t(2) = 4 \cdot 2 = 8$

$S(2|8)$



Abstand Punkt vom Ursprung mit dem Satz des Pythagoras:

$d(O; S) = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

Der Punkt hat einen Abstand von $\sqrt{68}$ vom Ursprung.

Lösung A2

$f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$

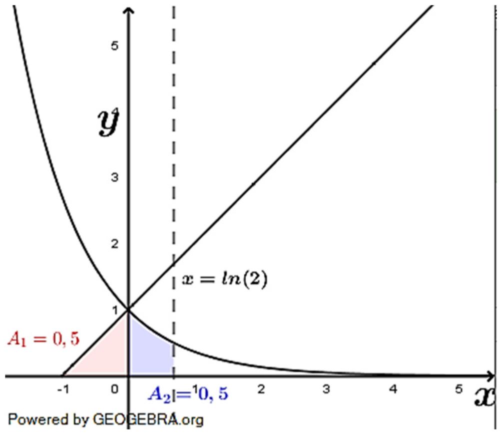
Berechnung der Teilfläche A_1:

Die Teilfläche A_1 ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten-Längen 1.

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5\ FE$

Berechnung der Teilfläche A_2:

Die Teilfläche A_2 berechnet sich über das Integral unter f.



$A_2 = \int_0^u e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^u = -e^{-u} + 1$

$A_1 = A_2$

$-e^{-u} + 1 = 0{,}5$

$e^{-u} = 0{,}5 \quad | \quad ln$

$-u = ln\,(0{,}5)$

$u = -\,ln(0{,}5) = ln\,(2)$

$A_2 = -e^{-\,ln(2)} + 1 = -\frac{1}{e^{ln(2)}} = -\frac{1}{2} + 1 = 0{,}5$

Gesamtfläche:

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1\ FE$

Lösung A3

<u>Lösung 1:</u>

$f_1(x) = a \cdot \cos\big(b(x-c)\big) + d$

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

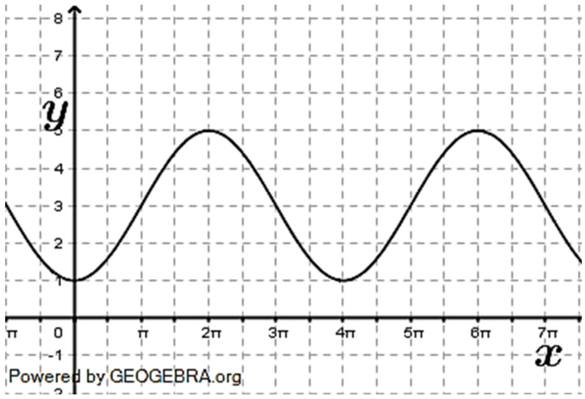
Die Kosinuskurve ist in x-Richtung nicht verschoben: ➔ $c = 0$

Die Kosinuskurve ist an der x-Achse gespiegelt: ➔ $a = -2$

Die Periode ist $p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 6\pi - 2\pi = 4\pi$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$f_1(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$



<u>Lösung 2:</u>

$f_2(x) = a \cdot sin\big(b(x-c)\big) + d$

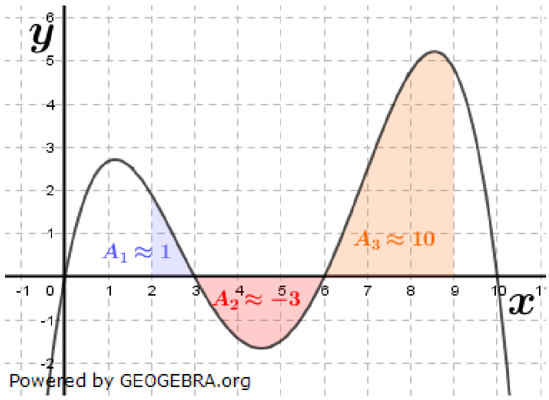
a, b und d wie bei Lösung 1.

Die Sinuskurve ist in x-Richtung um π Einheiten nach rechts verschoben, somit $c = \pi$.

$f_2(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right) + 3$

Lösung A4

a) Begründung f' im Intervall $[5;8]$ nicht monoton:
f besitzt im Intervall einen Wendepunkt mit positiver Steigung, der in der ersten Ableitung zu einem Hochpunkt wird.



b) Nullstellen von $I_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt; 2 \le x \le 9$:
Die erste Nullstelle liegt bei $x = 2$ (untere Grenze der Integralfunktion) mit der Steigung $m = 2$.
Nun müssen wir Kästchen zählen, da eine Funktionsgleichung nicht gegeben ist.

$\int_2^2 f(t)\,dt \approx 1$

$\int_3^6 f(t)\,dt \approx -3$

$\int_6^9 f(t)\,dt \approx 10$

$\int_2^6 f(t)\,dt \approx 1 - 3 = -2$

Damit gibt es im Intervall $[2;6]$ eine Stelle x_1 mit $\int_2^{x_1} f(t)\,dt = 0$

$\int_3^9 f(t)\,dt \approx -3 + 10 = 7$

Damit gibt es im Intervall $[6;9]$ eine Stelle x_2 mit $\int_3^{x_2} f(t)\,dt = 0$

Die Integralfunktion hat in $2 \le x \le 9$ insgesamt 3 Nullstellen.

Lösung A5

$A(6|4|-1)$; $B(0|-5|2)$; E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

a) Aufstellung der Geraden g:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$:

Aus g folgt:

$x_1 = 6 + 2t$; $x_2 = 4 + 3t$; $x_3 = -1 - t$

E: $2 \cdot (6 + 2t) - 2 \cdot (4 + 3t) - 1 - t = 6$

$12 + 4t - 8 - 6t - 1 - t = 6$

$3 - 3t = 6$

$-3t = 3$

$t = -1$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(4|1|0)$.

b) $$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit S:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$4 = 6 - 6t$

$6t = 2$

$t = \frac{1}{3}$

Wegen $0 < t < 1$ liegt der Punkt S auf der Strecke AB.

Lösung A6

E: $3x_2 - 4x_3 = 2$.

a) Die Ebene E verläuft parallel zur x_1-Achse, da in der Ebenengleichung die x_1-Koordinate fehlt.

b) Die Ebene F die senkrecht auf steht, muss den Normalenvektor $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

haben, denn $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Die Ebenengleichung lautet F: $4x_2 + 3x_3 = d$

Die Ebene F soll einen Abstand von 10 zur x_1-Achse haben. Da F ebenfalls parallel zur x_1-Achse verläuft, hat jeder Punkt der x_1-Achse denselben Abstand, somit auch der Ursprung. Wir bestimmen den Parameter d über die HNF.

HNF von F:

$\frac{|4x_2+3x_3+d|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x_2+3x_3+d|}{5} = 0$

$d(0; F) = \frac{|d|}{5} = 2$

$|d| = 10$

$d_1 = 10$; $d_2 = -10$

Es existieren somit zwei Ebenen, die die Aufgabenbedingung erfüllen.

$F_1 = 4x_2 + 3x_3 = 10$; $F_1 = 4x_2 + 3x_3 = -10$

Lösung A7

A: Computer OK; B: Bildschirm OK

$P(A)=\frac{7}{10}$; $P(B)=\frac{12}{15}$.

a) $P(A\cap B)=\frac{7}{10}\cdot\frac{12}{15}=\frac{28}{50}=\frac{14}{25}$

b) Jetzt sind nur noch 9 Computer vorhanden, von denen 3 defekt sind.
C: Computer OK.
$P(C)=\frac{6}{9}$ im ersten Zug, da es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt.
D: Mindestens einer von zwei ausgewählten Computern ist OK.
E: Beide ausgewählte Computer sind defekt.
Wir berechnen das Gegenereignis, denn
$P(D)=1-P(E)=1-\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=1-\frac{6}{72}=\frac{66}{72}=\frac{11}{12}$

Lösung A8

a) Term Nummer II beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei 20 Würfen genau 11 Mal eine 6 zu werfen.

b) <u>Term Nummer I:</u>
Beim 20-maligen Werfen eines Würfels fällt bei den ersten 11 Würfen eine und 6 und danach keine 6 mehr.
<u>Term Nummer III:</u>
Beim 20-maligen Werfen eines Würfels fällt nicht genau 9 mal keine 6.
Alternativ:
Beim 20-maligen Werfen eines Würfels fällt nicht genau 11 mal eine 6.