

Lösung Aufgabensatz 1/22 A1

$$f(x) = 4 - \frac{4}{x^2} \text{ und}$$

$$g(x) = 15 - 3x^2; \quad x > 0$$

- a) Nachweis eines Schnittpunktes in $x_0 = 2$.
Dies ist der Fall, wenn $f(2) =$
 $f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3.$

$$g(2) = 15 - 3 \cdot 2^2 = 3$$

- b) Die markierte Fläche ist die Fläche zwischen oberer Kurve g und unterer Kurve f im Intervall $I = [1; 2]$.

$$A = \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx$$

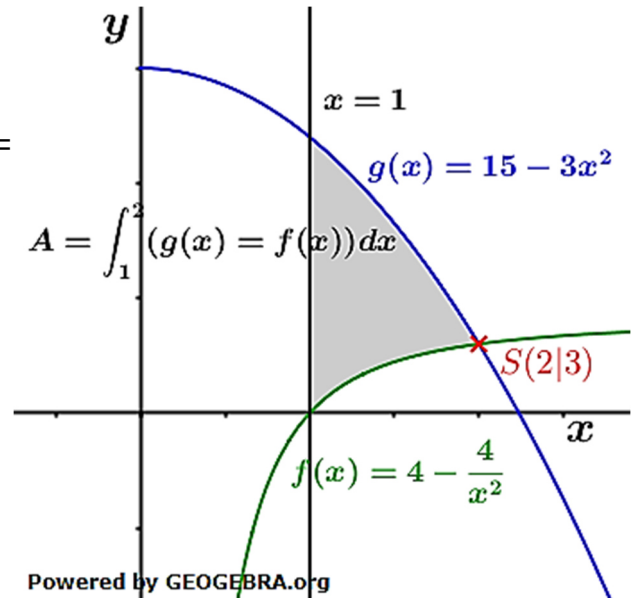
$$A = \int_1^2 \left(15 - 3x^2 - \left(4 - \frac{4}{x^2} \right) \right) dx$$

$$A = \int_1^2 \left(11 - 3x^2 + \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$A = \left[11x - x^3 - \frac{4}{x} \right]_1^2$$

$$A = 22 - 8 - 2 -$$

$$(11 - 1 - 4) = 6 \text{ FE}$$

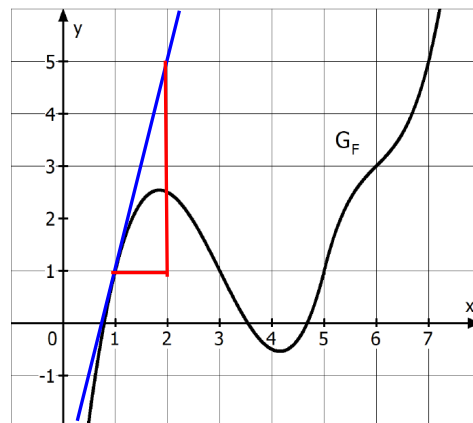


Lösung Aufgabensatz 1/22 A2

a) $\int_1^7 f(x) dx = [F(x)]_1^7 = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$

- b) Einzeichnen einer Tangente und Bestimmung des Steigungsdreiecks.

$$f(1) = F'(1) = 4$$



Lösung Aufgabensatz 1/22 A3

$$f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - kx^2 \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

- a) Begründung, dass $f_2(x)$ achsensymmetrisch ist.

$$f_2(x) = x^4 + (2 - 2) \cdot x^3 - 2x^2 = x^4 - 2x^2$$

Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Potenzen von x .
Somit ist der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y -Achse.

- b) Wert von k , für den $x_w = 1$ eine Wendestelle von f_k ist.

$$\text{Wendestellen mit } f_k''(x) = 0$$

$$f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - kx^2$$

$$f_k'(x) = 4x^3 + 3 \cdot (2 - k) \cdot x^2 - 2kx$$

$$f_k''(x) = 12x^2 + 6 \cdot (2 - k) \cdot x - 2k$$

$$f_k''(x) = 12x^2 + (12 - 6k) \cdot x - 2k$$

$$f_k''(x_w) = 0$$

$$12 + (12 - 6k) - 2k = 0$$

$$24 - 8k = 0$$

$$8k = 24$$

$$k = 3$$

$f_3(x)$ hat in $x_w = 1$ eine Wendestelle.

Lösung Aufgabensatz 1/22 A4

Allgemeine Form einer quadratischen Gleichung:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p(0) = 1 \rightarrow c = 1$$

Schnittwinkel 90° mit $y = \frac{1}{4}x + 1$:

$$p'(0) = -4$$

| Orthogonalitätsbedingung

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$b = -4$$

Extrempunktbestimmung mit $p'(x) = 0$

$$2ax_E + b = 0$$

$$x_E = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{a}$$

Der y -Wert an der Stelle x_E soll x_E sein,

$$\text{also } p(x_E) = x_E$$

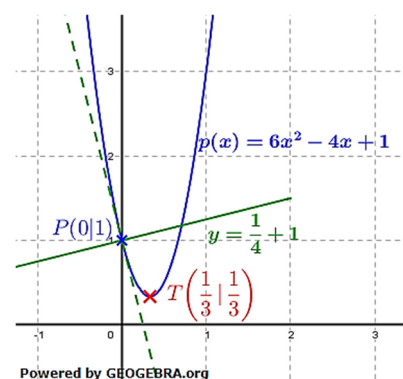
$$a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 1 = \frac{2}{a}$$

| $\cdot a$

$$4 - 8 + a = 2$$

$$a = 6$$

$$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$$



Lösung Aufgabensatz 1/22 A5

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \text{ und } E: 3x_1 - x_3 = -2$$

a) Richtungsvektor Gerade $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Normalenvektor Ebene $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wegen $\vec{u} = \vec{n}_E$ ist g orthogonal zu E .

b) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \parallel E$ wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Gesucht ist die Gerade in E ,
die senkrecht unter der
Geraden h liegt.

Wir bilden eine Hilfsgerade j
durch den Aufpunkt von h
mit dem Normalenvektor
von E als Richtungsvektor.

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir schneiden diese Gerade
mit der Ebene E und erhalten dadurch den Lotfußpunkt L .

Aus f folgt:

$$x_1 = 7 + 3r$$

$$x_3 = 3 - r$$

$$x_1; x_3 \rightarrow E$$

$$3 \cdot (7 + 3r) - (3 - r) = -2$$

$$21 + 9r - 3 + r = -2$$

$$10r = -20$$

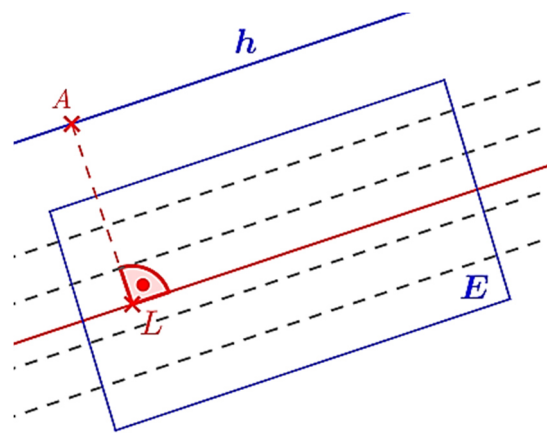
$$r = -2$$

$$r \rightarrow j$$

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt wird zum Aufpunkt der gesuchten Gerade.

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung Aufgabensatz 1/22 A6

$P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt ergibt $Q(7|2|11)$.

- a) Die Ebene an der gespiegelt wird, muss in der Mitte der Strecke $\overline{PQ}$ liegen. Der Mittelpunkt der Strecke sei M .

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+7 \\ 2+2 \\ 3+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$M \in E$. Der Normalenvektor von E ist der Vektor $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-2 \\ 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + 4x_3 = d \quad | \quad \text{Punktprobe mit } M$$

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = d$$

$$d = 40$$

Die Spiegelebene hat die Gleichung $3x_1 + 4x_3 = 40$

- b) Die Grafik verdeutlicht die Situation.

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{RP}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{MQ}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7-4 \\ 2-2 \\ 11-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

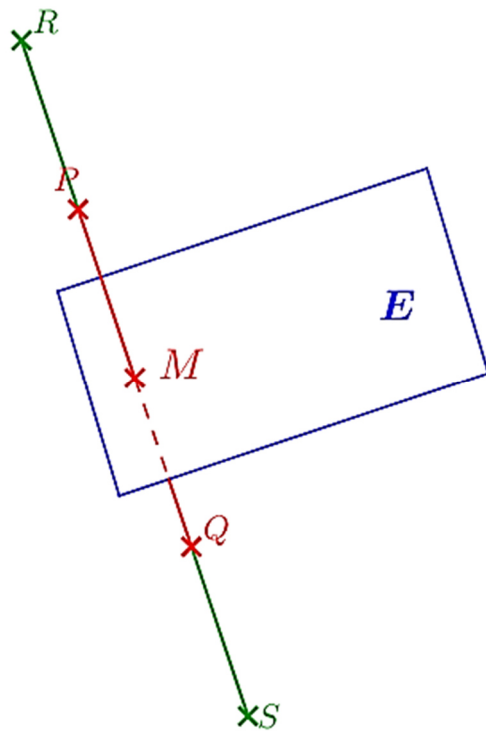
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{MQ}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 7-4 \\ 2-2 \\ 11-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind

$$R(-2|2|-1)$$



Powered by GEOGEBRA

Lösung Aufgabensatz 1/22 A7

Binomialverteilung mit $p = 0,5$ und $\mu = 18$.

$$a) \quad \mu = n \cdot p \rightarrow n = \frac{\mu}{p} = \frac{18}{0,5} = 36$$

$$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{18 \cdot 0,5} = 3$$

- b) $P(X = 14) = P(X = 22)$. Die beiden Werte liegen links und rechts vom Erwartungswert gleich weit entfernt und die Wahrscheinlichkeit für Erfolg beträgt 0,5.

Lösung Aufgabensatz 1/22 A8

Aufgabe zum Erwartungswert.

Sei die Anzahl blauer Kugeln. Dann gilt für den Zug:

$$P(\text{blau}) = \frac{a}{100}; \quad P(\text{rot}) = \frac{100-a}{100}$$

Wird rot gezogen, so erhält der Spieler a Cent. Wird blau gezogen, erhält der Spieler 10 Cent.

Berechnung des Erwartungswertes:

$$E(X) = a \cdot \frac{100-a}{100} + 10 \cdot \frac{a}{100}$$

$$E(X) = \frac{100a - a^2}{100} + 10 = -\frac{a^2}{100} + a + 10$$

Maximum mit $E'(X) = 0$

$$E'(X) = -\frac{a}{50} + 1$$

$$-\frac{a}{50} + 1 = 0$$

$$\frac{a}{50} = 1$$

$$a = 50$$

Der Spieler muss 50 blaue Kugeln für das Spiel festlegen.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A7

Glücksrad mit $P(\text{gelb}) = \frac{1}{3}$; $P(\text{rot}) = \frac{1}{2}$.

$$a) \quad P(\text{blau}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{blau}; \text{blau}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- b) Das Glücksrad wird 5 Mal gedreht. Es erscheint mindestens 4 mal gelb.