



### Aufgabensatz 2/22 A1

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{0,5x^2}$ .

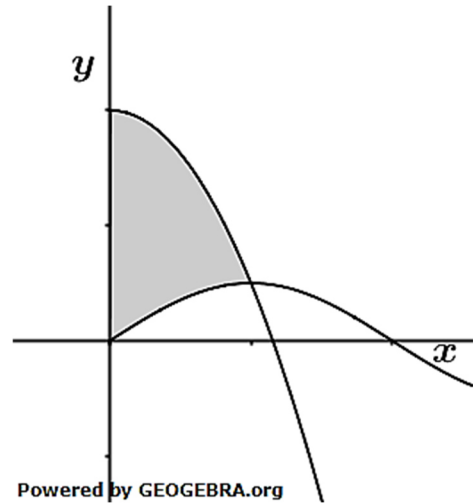
Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A2

Abgebildet sind die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = 4 - 3x^2$  und  $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .

- a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an der Stelle  $x_0 = 1$  schneiden.
- b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A3

Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  besitzt den Tiefpunkt  $T(1|-2)$ . Der Graph der Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$  entsteht, indem  $G_f$  um  $a$  Einheiten nach rechts und um  $b$  Einheiten nach unten verschoben wird. Bestimmen Sie die Werte von  $a$  und  $b$ .

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A4

Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen dritten Grades berühren die  $x$ -Achse im Punkt  $O(0|0)$ . Jeder Graph der Schar besitzt die Extremstelle  $x_0 = -2$ . Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar den Punkt  $P(-3|0)$  gemeinsam haben.

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A5

Gegeben sind die Ebene  $E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$  und für jedes  $a \in \mathbb{R}$  eine

Gerade  $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

- a) Bestimmen Sie den Wert von  $a$ , für den die Gerade  $g_a$  parallel zu  $E$  ist.
- b) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist  $P_a$  der Schnittpunkt von  $g_a$  mit der  $x_1x_3$ -Ebene. Bestimmen Sie den Wert von  $a$ , für den  $P_a$  in  $E$  liegt.

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A6

Gegeben sind die parallelen Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ .

- a) Der Punkt  $A(4|-3|0)$  liegt auf  $g$ . Weisen Sie nach, dass  $A$  derjenige Punkt auf  $g$  ist, der vom Punkt  $B(0|-1|4)$  den kleinsten Abstand hat.
- b) Die Gerade  $h$  ist die Bildgerade von  $g$  bei einer Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
Ermitteln Sie eine Gleichung von  $E$ .

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A7

Ein Glücksrad besteht aus einem gelben, einem blauen und einem roten Sektor. Wird das Glücksrad einmal gedreht, erscheint der gelbe Sektor mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  und der rote Sektor mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ .

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Drehen der blaue Sektor zweimal erscheint.
- Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem Term

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3}$$

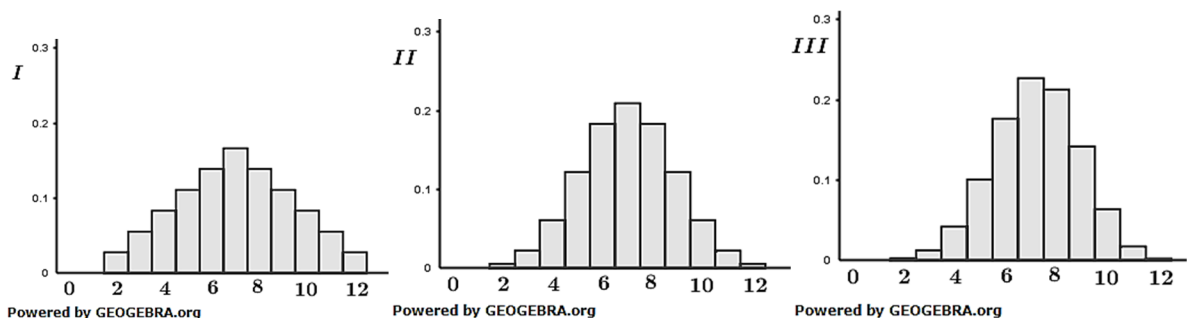
berechnen lässt.

(Quelle Abitur BW 2022)

### Aufgabensatz 2/22 A8

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$ :

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen.  $X$  gibt die Summe der dabei gewürfelten Zahlen an.
  - Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.  $Y$  gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.
- Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit  $P(X = 4)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $P(X = 10)$  übereinstimmt.
  - Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X$  und  $Y$  werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme *I*, *II* und *III* dargestellt. Ordnen Sie  $X$  und  $Y$  jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



(Quelle Abitur BW 2022)

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A1

$$f(x) = e^{0,5x^2}$$

$$f'(x) = x \cdot e^{0,5x^2}$$

| erste Ableitung mit Kettenregel

Für zweite Ableitung ist die Produktregel erforderlich.

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v = e^{0,5x^2} \quad v' = x \cdot e^{0,5x^2}$$

$$f''(x) = e^{0,5x^2} + x^2 \cdot e^{0,5x^2}$$

$$f''(x) = e^{0,5x^2} (1 + x^2)$$

$$f''(0) = e^0 (1 + 0) = 1$$

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A2

$$f(x) = 4 - 3x^2 \text{ und } g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

a) Nachweis des Schnittpunkts bei

$$x_0 = 1:$$

$$f(1) = 4 - 3 = 1$$

$$g(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Die Graphen der beiden Funktionen schneiden sich im Punkt  $S(1|1)$ .

b) Inhalt der markierten Fläche:

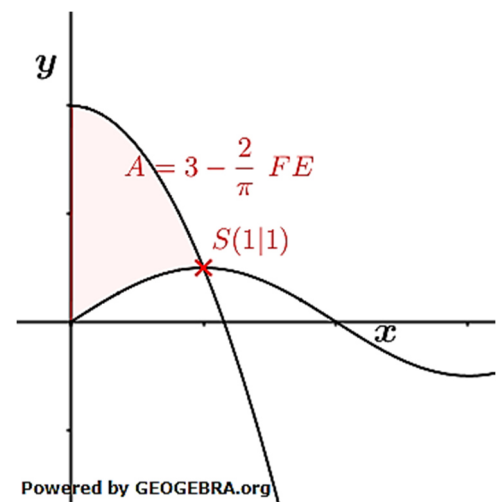
$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$$

$$A = \int_0^1 \left(-3x^2 + 4 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx$$

$$A = \left[-x^3 + 4x + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1$$

$$A = -1 + 4 + 0 - \left(0 + \frac{2}{\pi}\right) = 3 - \frac{2}{\pi}$$

Die markierte Fläche ist  $3 - \frac{2}{\pi}$  FE groß.





### Lösung Aufgabensatz 2/22 A3

$$g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$$

Wir bestimmen zunächst den Tiefpunkt von  $g$  mittels  $g'(x) = 0$  und  $g''(x_E) > 0$ .

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$g''(x) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \quad | \quad \cdot 3; +9$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

$$g''(x_E) > 0 \rightarrow x_E = 3$$

$$g(x_E) = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 = -6$$

Der Tiefpunkt von  $g$  hat die Koordinaten  $T^*(3 | -6)$

Der Tiefpunkt von  $f$  hat die Koordinaten  $T(1 | -2)$

Somit wurde  $f$  um  $a = 2$  Einheiten nach rechts und  $b = 4$  Einheiten nach unten verschoben.

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A4

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit Berührungspunkt der  $x$ -Achse in  $O(0|0)$  lautet

$$f(x) = ax^2 \cdot (x - b)$$

Nach Aufgabenstellung ist  $f'(-2) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$$

$$f'(x) = a(3x^2 - 2bx)$$

$$f'(-2) = a(3(-2)^2 - 2b(-2)) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$3(-2)^2 - 2b(-2) = 0$$

$$12 + 4b = 0$$

$$b = -3$$

$$f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$$

Prüfung auf gemeinsamen Punkt  $P(-3|0)$

*Elegante Lösung:*

Der Punkt  $P(-3|0)$  ist eine Nullstelle. Bei Streckungen ganzrationaler Funktionen verändert sich die Lage der Nullstellen nicht.

*Rechnerische Lösung:*

$$f_a(-3) = f_{a+h}(-3); h \in \mathbb{R}$$

$$f_a(-3) = 9a \cdot (-3 + 3) = 0$$

$$f_{a+h}(-3) = 9(a+h) \cdot (-3 + 3) = 0$$

Der Punkt  $P(-3|0) \in f_a(x)$  mit  $f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$ .

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A5

$$E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \quad g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Orthogonalitätsbedingung:  $\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 2a - 15 + 16 = 0$$

$$2a = -1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$g_{-\frac{1}{2}}$  steht senkrecht auf  $E$ .

b) Koordinatengleichung der  $x_1x_3$ -Ebene:  $x_2 = 0$

Bestimmung von  $P_a$ :

Aus  $g_a$  folgt:

$$x_2 = 5 - 5t$$

$$x_2 \rightarrow E$$

$$5 - 5t = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_a \in E$$

$$x_1 = -1 + a; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -1$$

$$2 \cdot (-1 + a) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) = 12$$

$$-2 + 2a + 4 = 12$$

$$2a = 10$$

$$a = 5$$

$$P_5 \in E.$$

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A6

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

- a) Wenn  $A$  zum Punkt  $B(0|-1|4)$  den kleinsten Abstand hat,

dann steht  $\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ -1 - (-3) \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 8 - 4 = 0$$

$A \in g$  hat den kleinsten Abstand zu  $B$ .

- b) Gemäß Aufgabenteil a) ist  $|\overrightarrow{AB}|$  der Abstand der beiden Geraden.

Wir bestimmen den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ .

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 + 0 \\ -3 - 1 \\ 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Ebene verläuft durch diesen Mittelpunkt und

hat den Vektor  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  als Normalenvektor.

$$E: -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = d \quad \text{Punktprobe mit } M(2|-2|2)$$

$$-4 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = d$$

$$d = -4$$

$$E: -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \quad | :(-2)$$

$$E: 2x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A7

Glücksrad mit  $P(\text{gelb}) = \frac{1}{3}$ ;  $P(\text{rot}) = \frac{1}{2}$ .

a)  $P(\text{blau}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$   
 $P(\text{blau}; \text{blau}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

- b) Das Glücksrad wird 5 Mal gedreht. Es erscheint mindestens 4 mal gelb.

### Lösung Aufgabensatz 2/22 A8

a) Bei der Augensumme von 2 Würfeln liegt der Erwartungswert bei Augensumme 7. Die Dichtefunktion ist symmetrisch zum Erwartungswert.  $P(X = 4)$  und  $P(X = 10)$  liegen links und rechts symmetrisch zum Erwartungswert.

b) Histogramm I zeigt die Verteilung von  $X$ .  $P(X = 7) = \frac{6}{36} \approx 0,17$ . Das Maximum bei Histogramm I zeigt etwa diesen Wert.

Histogramm III zeigt die Verteilung von  $Y$ .  $P(\text{schwarz}) = 0,6$ ;  
 $n = 12$ ;  $\mu = 12 \cdot 0,6 = 7,2 \approx 7$ .

Wegen  $P(\text{schwarz}) = 0,6$  ist das Histogramm NICHT symmetrisch zum Erwartungswert.