Lösung Aufgabensatz 2/22 A1

$f(x) = e^{0{,}5x^2}$

$f'(x) = x \cdot e^{0{,}5x^2}$ | erste Ableitung mit Kettenregel

Für zweite Ableitung ist die Produktregel erforderlich.

$u = x \qquad u' = 1$

$v = e^{0{,}5x^2} \qquad v' = x \cdot e^{0{,}5x^2}$

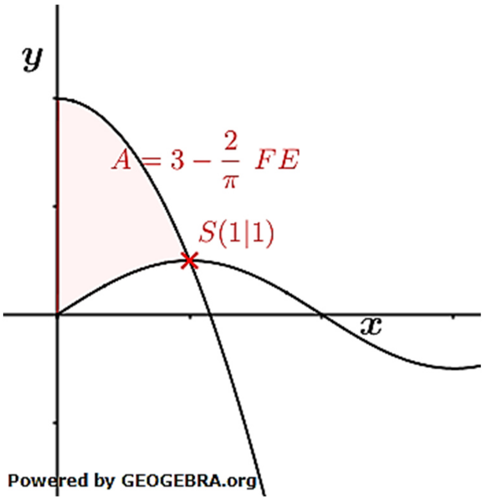
$f''(x) = e^{0{,}5x^2} + x^2 \cdot e^{0{,}5x^2}$

$f''(x) = e^{0{,}5x^2}(1 + x^2)$

$f''(0) = e^0(1 + 0) = 1$

Lösung Aufgabensatz 2/22 A2

$f(x) = 4 - 3x^2$ und $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$



a) Nachweis des Schnittpunkts bei $x_0 = 1$:

$f(1) = 4 - 3 = 1$

$g(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Die Graphen der beiden Funktionen schneiden sich im Punkt $S(1|1)$.

b) Inhalt der markierten Fläche:

$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$

$A = \int_0^1 \left(-3x^2 + 4 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx$

$A = \left[-x^3 + 4x + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1$

$A = -1 + 4 + 0 - \left(0 + \frac{2}{\pi}\right) = 3 - \frac{2}{\pi}$

Die markierte Fläche ist $3 - \frac{2}{\pi}\ FE$ groß.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A3

$g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$

Wir bestimmen zunächst den Tiefpunkt von g mittels $g'(x) = 0$ und $g''(x_E) > 0$.

$g'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

$g''(x) = \frac{2}{3}x$

$\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \qquad | \quad \cdot 3;\ +9$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

$g''(x_E) > 0 \Rightarrow \quad x_E = 3$

$g(x_E) = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 = -6$

Der Tiefpunkt von g hat die Koordinaten $T^*(3|-6)$

Der Tiefpunkt von f hat die Koordinaten $T(1|-2)$

Somit wurde f um $a = 2$ Einheiten nach rechts und $b = 4$ Einheiten nach unten verschoben.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A4

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit Berührpunkt der x-Achse in $O(0|0)$ lautet

$f(x) = ax^2 \cdot (x - b)$

Nach Aufgabenstellung ist $f'(-2) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$

$f'(x) = a(3x^2 - 2bx)$

$f'(-2) = a\left(3(-2)^2 - 2b(-2)\right) = 0 \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$3(-2)^2 - 2b(-2) = 0$

$12 + 4b = 0$

$b = -3$

$f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$

Prüfung auf gemeinsamen Punkt $P(-3|0)$

Elegante Lösung:

Der Punkt $P(-3|0)$ ist eine Nullstelle. Bei Streckungen ganzrationaler Funktionen verändert sich die Lage der Nullstellen nicht.

Rechnerische Lösung:

$f_a(-3) = f_{a+h}(-3);\ \ h \in \mathbb{R}$

$f_a(-3) = 9a \cdot (-3 + 3) = 0$

$f_{a+h}(-3) = 9(a + h) \cdot (-3 + 3) = 0$

Der Punkt $P(-3|0) \in f_a(x)$ mit $f_a(x) = ax^2 \cdot (x + 3)$.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A5

$E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \quad g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R}$

a) Orthogonalitätsbedingung: $\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 2a - 15 + 16 = 0$

$2a = -1$

$a = -\frac{1}{2}$

$g_{-\frac{1}{2}}$ steht senkrecht auf E.

b) Koordinatengleichung der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$
Bestimmung von P_a:
Aus g_a folgt:

$x_2 = 5 - 5t$

$x_2 \to E$

$5 - 5t = 0 \ \Rightarrow \ t = 1$

$\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P_a \in E$

$x_1 = -1 + a; \ \ x_2 = 0; \ \ x_3 = -1$

$2 \cdot (-1 + a) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) = 12$

$-2 + 2a + 4 = 12$

$2a = 10$

$a = 5$

$P_5 \in E$.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A6

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$.

a) Wenn A zum Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand hat, dann steht $\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ -1-(-3) \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 8 - 4 = 0$$

$A \in g$ hat den kleinsten Abstand zu B.

b) Gemäß Aufgabenteil a) ist $|\overrightarrow{AB}|$ der Abstand der beiden Geraden.
Wir bestimmen den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4+0 \\ -3-1 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Ebene verläuft durch diesen Mittelpunkt und hat den Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor.

$E\colon -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = d$ Punktprobe mit $M(2|-2|2)$

$-4 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = d$

$d = -4$

$E\colon -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \quad | \quad :(-2)$

$E\colon 2x_1 - x_2 - x_3 = 2$

Lösung Aufgabensatz 2/22 A7

Glücksrad mit $P(gelb) = \frac{1}{3}$; $P(rot) = \frac{1}{2}$.

a) $P(blau) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P(blau; blau) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

b) Das Glücksrad wird 5 Mal gedreht. Es erscheint mindestens 4 mal gelb.

Lösung Aufgabensatz 2/22 A8

a) Bei der Augensumme von 2 Würfeln liegt der Erwartungswert bei Augensumme 7. Die Dichtefunktion ist symmetrisch zum Erwartungswert. $P(X=4)$ und $P(X=10)$ liegen links und rechts symmetrisch zum Erwartungswert.

b) Histogramm I zeigt die Verteilung von X. $P(X=7)=\frac{6}{36}\approx 0{,}17$. Das Maximum bei Histogramm I zeigt etwa diesen Wert.
Histogramm III zeigt die Verteilung von Y. $P(schwarz)=0{,}6$; $n=12$; $\mu=12\cdot 0{,}6=7{,}2\ \approx 7$.
Wegen $P(schwarz)=0{,}6$ ist das Histogramm NICHT symmetrisch zum Erwartungswert.