Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-2 BW

Aufgabensatz 2/23 A1

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter f'' hat folgende Eigenschaften:

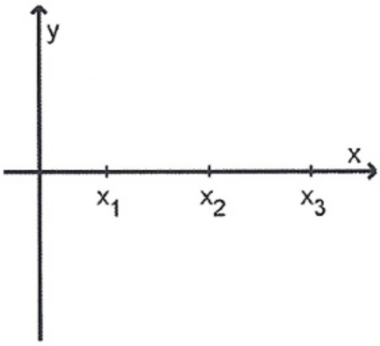
- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die Abbildung zeigt die Position von x_1, x_2 und x_3.

a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

b) Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f.

Abbildung

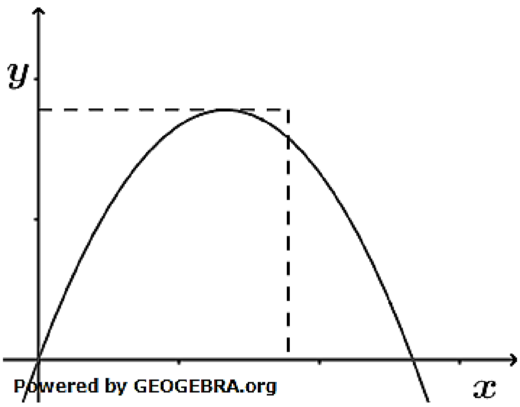


(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A2

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit
$f(x) = -x^2 + 2ax;\ \ a \in]1;\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.



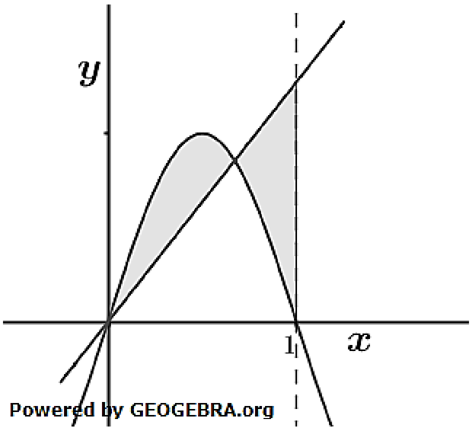
b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung).
Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein.
Bestimmen Sie den Wert von a.

(Quelle Abitur BW 2023)

Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-2 BW

Aufgabensatz 2/23 A3

Abgebildet sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x)$ sowie eine Ursprungsgerade g mit der Steigung m.



a) Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion von f, deren Graph den Ursprung enthält.

b) Berechnen Sie den Wert von m, für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A4

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden.

Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, die Gerade h hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

a) Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 2/23 A5

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p. Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

b) Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig:
E: „Beim Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt."
G: „Die Person gewinnt das Spiel."
Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

(Quelle Abitur BW 2023)

Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-2 BW

Aufgabensatz 2/23 A6

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1" oder die „2" erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

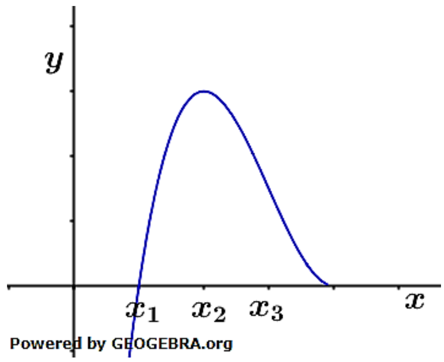
b) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

(Quelle Abitur BW 2023)

Lösung Aufgabensatz 2/23 A1

a) f' hat ein Minimum (Aufgabenstellung). Damit ist f' mindestes vom Grad 2. Damit ist f mindestens vom Grad 3.

b) Der Graph von f hat bei x_1 eine Nullstelle und bei x_2 eine Extremstelle und bei x_3 eine Wendestelle.
Da f' bei x_3 ein Minimum besitzt, besitzt die Wendestelle von f eine Tangente mit einer minimalen Steigung.



Lösung Aufgabensatz 2/23 A2

$f(x) = -x^2 + 2ax;\ \ a \in \,]1;\infty[$ mit $N_1(0|0)$ und $N_2(2a|0)$.

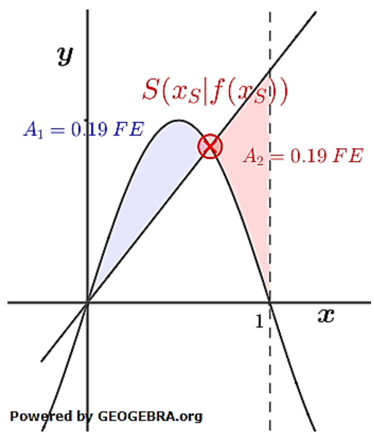
a) Berechnung Flächeninhalt unter f:

$$A_f = \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax\,)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{1}{3}\cdot 8a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

b) Bestimmung des Hochpunktes = Seitenlänge des Quadrats.
Der Hochpunkt liegt in der Mitte der beiden Nullstellen, also bei $x = a$.
$f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$
Fläche Quadrat
$A_{Quadrat} = a^2 \cdot a^2 = a^4$
Fläche unter der Kurve gleichsetzen mit Fläche des Quadrats:
$\frac{4}{3}a^3 = a^4$
$a^4 - \frac{4}{3}a^3 = 0$
$a^3\left(a - \frac{4}{3}\right) = 0$
$a_1 = 0;\ \ a_2 = \frac{4}{3}$
a_1 ist keine Lösung der Aufgabe.
Der Wert von a beträgt $\frac{4}{3}\ LE$.

Lösung Aufgabensatz 2/23 A3

a) Bestimmung der Stammfunktion von f, die durch den Ursprung verläuft:
$F(x) = \int \sin(\pi x)\ dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + C$
$F(0) = 0$
$-\frac{\cos(0)}{\pi} + C = 0$
$-\frac{1}{\pi} + C = 0$
$C = 1/\pi$
$F(x) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos(\pi x))$



b) Flächenberechnungen über Integral zwischen Graphen.

$A_1 = \int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx$

$A_2 = \int_{x_2}^{1}(g(x) - f(x))\,dx$

$A_1 = A_2$ (Aufgabenstellung)

$\int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx = \int_{x_2}^{1}(g(x) - f(x))\,dx$

$\int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx - \int_{x_2}^{1}\big(g(x) - f(x)\big)\,dx = 0$

$\int_0^{x_S}(f(x) - g(x))\,dx + \int_{x_S}^{1}\big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 0$

$\int_0^{x_S}(\sin(\pi x) - mx)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x) - \frac{1}{2}mx^2\right]_0^{x_S} = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2}mx_S^2 + \frac{1}{\pi}$

$\int_{x_S}^{1}(sin(\pi x) - mx)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x) - \frac{1}{2}mx^2\right]_{x_S}^{1} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}m - (-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2}mx_S^2)$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}m + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) + \frac{1}{2}mx_S^2$

$-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2}mx_S^2 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}m + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) + \frac{1}{2}mx_S^2 = 0$

$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}m = 0$

$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}m$

$m = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A4

a) Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Prüfung, ab $A(3|5|5)$ auf g liegt:

$\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

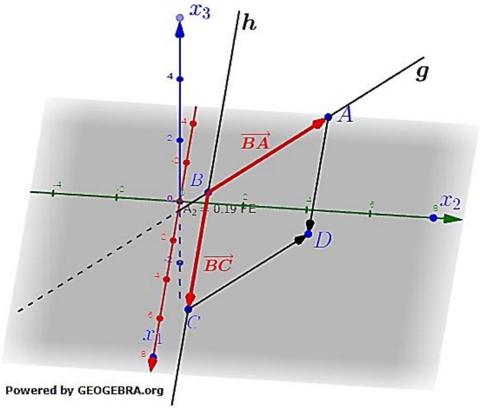
(1) $3 = 1 + r$ ➔ $r = 2$

(2) $5 = 1 + 2r$ ➔ $r = 2$

(3) $5 = 1 + 2r$ ➔ $r = 2$

Der Punkt $A(3|5|5)$ auf g.

b) Geradengleichung h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$



Schnittpunkt der beiden Geraden ist B (Aufgabenstellung).

$\overrightarrow{BA}$ = Rautenseite.

$|\overrightarrow{BA}| = \left|\begin{pmatrix}3-1\\5-1\\5-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ auf h muss genauso lang sein.

C auf h hat die Koordinaten $C(1+r|1|1)$

$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}1+r-1\\1-1\\1-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right| = r = 6$

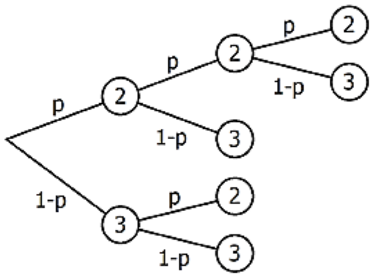
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Koordinaten der Punkte $C(7|1|1)$ und $D(9|5|5)$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A5

a) Baumdiagramm



b) Bedingung für stochastisch unabhängige Ereignisse:

$P(G \cap E) = P(G) \cdot P(E)$
$P(G) = P(222; 33) = p^3 + (1-p)^2$
$P(E) = P(2) = p$
$P(G \cap E) = P(222) = p^3$
$P(G) \cdot P(E) = p \cdot (p^3 + (1-p)^2)$
$p \cdot (p^3 + (1-p)^2) = p^3 \quad | \quad : p$
$p^3 + (1-p)^2 = p^2$
$p^3 + 1 - 2p = 0$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A6

a) Mindestens 2 schwarze Kugeln heißt 2 oder 3 schwarze Kugeln
Wahrscheinlichkeit eine 1 oder eine 2 zu würfeln beträgt $\frac{1}{3}$.
Wahrscheinlichkeit eine 3 bis 6 zu würfeln beträgt $\frac{2}{3}$.
Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 schwarze Kugeln:
$P(sss; gss; sgs; ssg) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27} + \frac{12}{27} = \frac{20}{27}$ was zu zeigen war.

b) Damit das funktioniert, müssen 2 oder 3 schwarze Kugeln in der Urne sein. Die Wahrscheinlichkeit für eine Urne mit 3 schwarzen Kugeln ist $P_3 = \frac{8}{27}$. Die für eine Urne mit 2 schwarzen Kugeln ist $P_2 = \frac{12}{27}$.
$P(2\ schwarze\ Kugeln) = P_3 \cdot P(ss) + P_2 \cdot P(ss)$
$= \frac{8}{27} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{12}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$