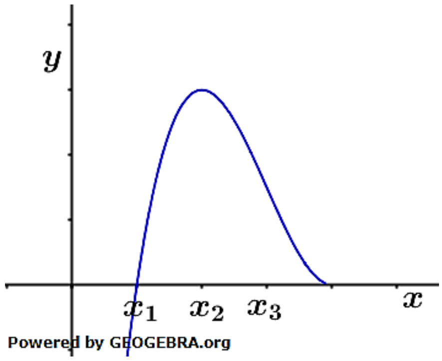
Lösung Aufgabensatz 2/23 A1

a) f' hat ein Minimum (Aufgabenstellung). Damit ist f' mindestes vom Grad 2. Damit ist f mindestens vom Grad 3.

b) Der Graph von f hat bei x_1 eine Nullstelle und bei x_2 eine Extremstelle und bei x_3 eine Wendestelle.
Da f' bei x_3 ein Minimum besitzt, besitzt die Wendestelle von f eine Tangente mit einer minimalen Steigung.



Lösung Aufgabensatz 2/23 A2

$f(x) = -x^2 + 2ax;\ \ a \in \,]1;\infty[$ mit $N_1(0|0)$ und $N_2(2a|0)$.

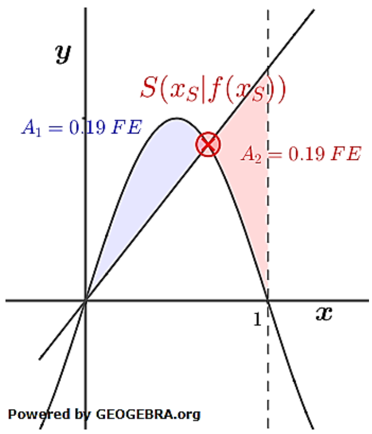
a) Berechnung Flächeninhalt unter f:

$$A_f = \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax\,)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{1}{3}\cdot 8a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

b) Bestimmung des Hochpunktes = Seitenlänge des Quadrats.
Der Hochpunkt liegt in der Mitte der beiden Nullstellen, also bei $x = a$.
$f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$
Fläche Quadrat
$A_{Quadrat} = a^2 \cdot a^2 = a^4$
Fläche unter der Kurve gleichsetzen mit Fläche des Quadrats:
$\frac{4}{3}a^3 = a^4$
$a^4 - \frac{4}{3}a^3 = 0$
$a^3\left(a - \frac{4}{3}\right) = 0$
$a_1 = 0;\ \ a_2 = \frac{4}{3}$
a_1 ist keine Lösung der Aufgabe.
Der Wert von a beträgt $\frac{4}{3}\ LE$.

Lösung Aufgabensatz 2/23 A3

a) Bestimmung der Stammfunktion von f, die durch den Ursprung verläuft:
$F(x) = \int \sin(\pi x)\ dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + C$
$F(0) = 0$
$-\frac{\cos(0)}{\pi} + C = 0$
$-\frac{1}{\pi} + C = 0$
$C = 1/\pi$
$F(x) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos(\pi x))$



b) Flächenberechnungen über Integral zwischen Graphen.

$A_1 = \int_0^{x_S} (f(x) - g(x))\, dx$

$A_2 = \int_{x_2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx$

$A_1 = A_2$ (Aufgabenstellung)

$\int_0^{x_S} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{x_2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx$

$\int_0^{x_S} (f(x) - g(x))\, dx - \int_{x_2}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx = 0$

$\int_0^{x_S} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{x_S}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = 0$

$\int_0^{x_S} (\sin(\pi x) - mx)\, dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x) - \frac{1}{2} m x^2\right]_0^{x_S} = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2} m x_S^2 + \frac{1}{\pi}$

$\int_{x_S}^{1} (sin(\pi x) - mx)\, dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x) - \frac{1}{2} m x^2\right]_{x_S}^{1} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} m - (-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2} m x_S^2)$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} m + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) + \frac{1}{2} m x_S^2$

$-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) - \frac{1}{2} m x_S^2 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} m + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x_S) + \frac{1}{2} m x_S^2 = 0$

$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} m = 0$

$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} m$

$m = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A4

a) Geradengleichung $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Prüfung, ab $A(3|5|5)$ auf g liegt:

$\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

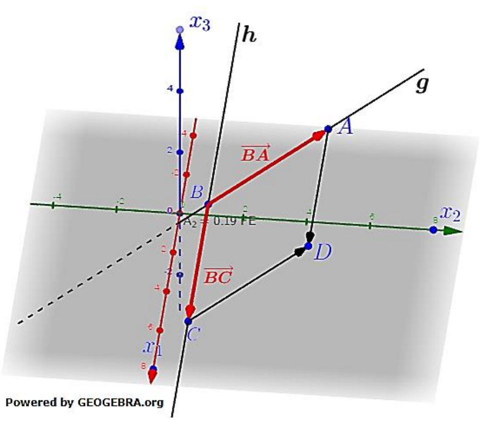
(1) $3 = 1 + r$ ➔ $r = 2$

(2) $5 = 1 + 2r$ ➔ $r = 2$

(3) $5 = 1 + 2r$ ➔ $r = 2$

Der Punkt $A(3|5|5)$ auf g.

b) Geradengleichung $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$



Schnittpunkt der beiden Geraden ist B (Aufgabenstellung).

$\overrightarrow{BA}$ = Rautenseite.

$|\overrightarrow{BA}| = \left|\begin{pmatrix}3-1\\5-1\\5-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ auf h muss genauso lang sein.

C auf h hat die Koordinaten $C(1 + r|1|1)$

$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}1+r-1\\1-1\\1-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right| = r = 6$

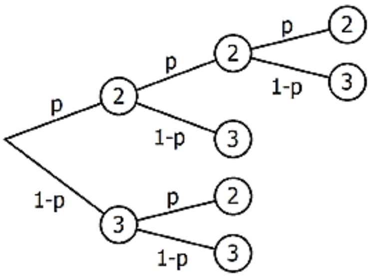
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Koordinaten der Punkte $C(7|1|1)$ und $D(9|5|5)$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A5

a) Baumdiagramm



b) Bedingung für stochastisch unabhängige Ereignisse:

$P(G \cap E) = P(G) \cdot P(E)$

$P(G) = P(222; 33) = p^3 + (1-p)^2$

$P(E) = P(2) = p$

$P(G \cap E) = P(222) = p^3$

$P(G) \cdot P(E) = p \cdot (p^3 + (1-p)^2)$

$p \cdot (p^3 + (1-p)^2) = p^3 \qquad | \quad : p$

$p^3 + (1-p)^2 = p^2$

$p^3 + 1 - 2p = 0$

Lösung Aufgabensatz 2/23 A6

a) Mindestens 2 schwarze Kugeln heißt 2 oder 3 schwarze Kugeln

Wahrscheinlichkeit eine 1 oder eine 2 zu würfeln beträgt $\frac{1}{3}$.

Wahrscheinlichkeit eine 3 bis 6 zu würfeln beträgt $\frac{2}{3}$.

Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 schwarze Kugeln:

$P(sss; gss; sgs; ssg) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27} + \frac{12}{27} = \frac{20}{27}$ was zu zeigen war.

b) Damit das funktioniert, müssen 2 oder 3 schwarze Kugeln in der Urne sein. Die Wahrscheinlichkeit für eine Urne mit 3 schwarzen Kugeln ist $P_3 = \frac{8}{27}$. Die für eine Urne mit 2 schwarzen Kugeln ist $P_2 = \frac{12}{27}$.

$P(2\ schwarze\ Kugeln) = P_3 \cdot P(ss) + P_2 \cdot P(ss)$

$= \frac{8}{27} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{12}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$