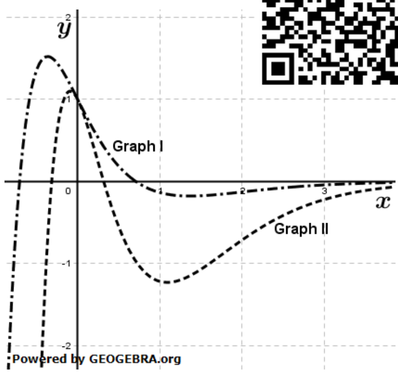
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Aufgabe A1.1

Für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist G_t der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = (1 - tx^2) \cdot e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$.



a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y -Achse unabhängig von t ist.
Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} darstellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist.
Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an.

c) Betrachtet wird die Tangente an G_0 im Punkt $B_0(0{,}5|f(0{,}5))$.
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse.
Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt.
Bei Rotation dieses Dreiecks um die x- bzw. y-Achse entsteht jeweils ein Körper. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch:
$$\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}.$$

d) Für einen bestimmten Wert von t besitzt der Graph G_t zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 8 haben.
Berechnen Sie diesen Wert von t.

e) Die Funktion H mit $H(x) = \left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von h mit $h(x) = f_t(x) + f_{t+2}(x)$. Die Graphen G_t und G_{t+2} besitzen für $x > 0$ keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

f) Für jedes $t > 0$ hat der Graph G_t zwei Extrempunkte P_t und Q_t.
Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ liegt.

Aufgabe A1.2

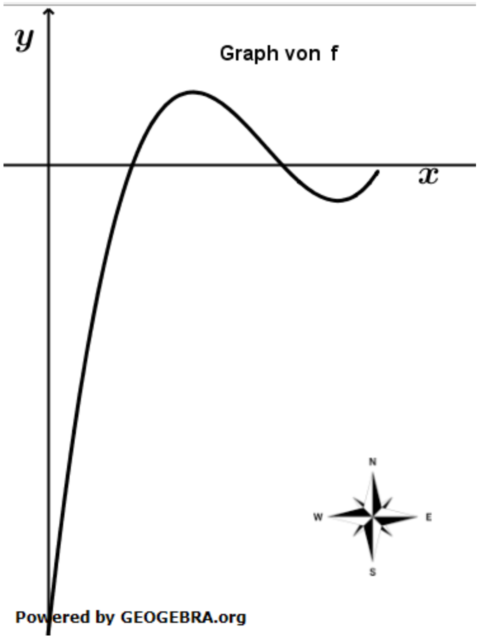
Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit $k > 0$, deren Ableitungsfunktionen $f_k{}'$ folgende Gleichung besitzen:
$$f_k'(x) = -\frac{1}{k^2}(x - k)(x + 3k)$$

a) Jeder Graph der Schar besitzt einen Wendepunkt. Betrachtet werden die Tangenten in diesen Wendepunkten. Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind.

b) Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt im ersten Quadranten. Alle diese Extrempunkte liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f_k.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Aufgabe A2.1



Die Abbildung stellt die Planskizze einer Landstraße dar. Der Verlauf dieser Landstraße wird durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2};\ \ 0 \le x \le \frac{9}{2}$$

beschrieben. Die positive y-Achse beschreibt dabei die Himmelsrichtung Norden, die positive x-Achse die Himmelsrichtung Osten. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts P, der den nördlichsten Punkt der Landstraße darstellt.
An der Stelle $x_0 = 3$ wechselt das Vorzeichen der Funktion f'' vom Negativen ins Positive. Beschreiben Sie, was dies für den Verlauf der Landstraße bedeutet. (Teilergebnis: $P(2|1)$).

b) Ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{27}{8}x^2 + \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$ stellt einen Fahrradweg dar, der zwei Punkte der Landstraße verbindet. Diese beiden Punkte werden durch $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ mit $a < b$ dargestellt.
Bestimmen Sie die Koordinaten von A und B (Teilergebnis: $a = 0$ und $b = 1$).
Berechnen Sie $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Im Folgenden wird auch der Höhenverlauf der Landstraße betrachtet. Stellt $R(r|f(r))$ einen Punkt auf der Landstraße dar, so gilt für seine Höhe $h(r)$:

$$h(r) = u(f(r)) \text{ mit } u(x) = 2 - \frac{1}{500}(x-1)^2$$

$h(r)$ in Kilometer über der Meereshöhe.

c) Zeigen Sie, dass der westlichste Punkt der Landstraße auf einer Höhe von etwa 1890 Meter liegt.
Begründen Sie, dass kein Punkt der Landstraße höher als 2000 Meter liegt.
Der am höchsten gelegene Punkt auf der Landstraße wird durch den Punkt S auf dem Graphen von f dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

d) Zum Abfluss von Regenwasser sind die durch $P(2|1)$ und $Q(0|f(0))$ dargestellten Punkte auf der Landstraße durch ein geradlinig verlaufendes Rohr verbunden. Berechnen Sie das Gefälle dieses Rohrs.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Aufgabe A2.2

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung.

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird.

c) Die Tangente an G_a an der Stelle $x_0 = 0$ und die Tangente an G_a an der kleinsten positiven Nullstelle von f_a schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein.
Bestimmen Sie alle Werte von a, für die der Inhalt dieses Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt.

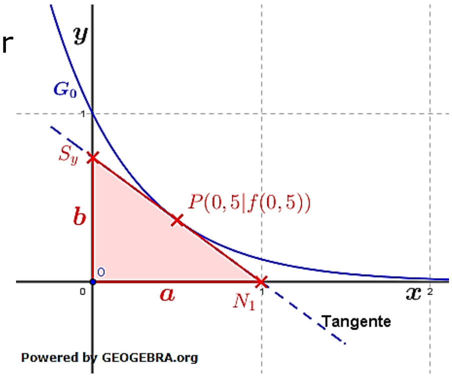
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Lösungslogik A1.1

a) *Schnittpunkt mit der y-Achse:*
Wir berechnen $f(0)$.
Graph von G_{10}:
Wir berechnen den y-Wert an einer gut ablesbaren x-Stelle, z.B. $x_0 = 1$.

b) *Monotonienachweis G_0:*
Wir bilden die $f_0'(x)$ und prüfen, ob sich im Verlauf des Graphen der Ableitung eine Nullstelle befindet.
Funktionsgleichung der Umkehrung:
Wir stellen $f_0(x)$ nach x um. Nach erfolgter Umstellung vertauschen wir die Variablen x und y wieder und erhalten damit die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

c) *Schnittwinkel der Tangente in $P(0{,}5|f(0{,}5))$ mit der x –Achse.*
Wir berechnen die Steigung des Graphen von f_0 an der Stelle $x_0 = 0{,}5$. Dies ist der Tangens des Schnittwinkels der Tangente mit der x-Achse. Ein Schnittwinkel mit der x-Achse wird stets von der in positiver x-Richtung der x-Achse ausgehend linksdrehend gezählt. Somit können auch Winkel $> 90\,°$ vorkommen.
Achtung: Bei der Berechnung des Winkels über die TR-Funktion $\tan^{-1}$ muss der TR auf Gradmaß stehen.



Kathetenlängen eines Dreiecks.
Wir stellen die Tangentengleichung im Punkt $P(0{,}5|f(0{,}5))$ auf. Der Abstand vom Ursprung bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist die Länge der einen Kathete, der Abstand vom Ursprung bis zum Schnittpunkt mit der y-Achse die Länge der zweiten Kathete.
Interpretation einer Ungleichung:
Bei Rotation des Dreiecks um die x-Achse als auch um die y-Achse entsteht ein Kegel. Die Volumenformel eines Kegels lautet $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.
Bei der Rotation um die x-Achse entspricht die Kathete a der Höhe und die Kathete b dem Radius dieses Kegels.
Bei der Rotation um die y-Achse entspricht die Kathete a dem Radius und die Kathete b der Höher dieses Kegels.
Die Ungleichung sagt aus, welche der beiden Volumina das Größere ist.

d) *Bestimmung Nullstellen in Abhängigkeit von t:*
Wir berechnen die Lage der beiden Nullstellen mit $f_t(x) = 0$.
t für Abstand 8:
Wir bilden den Wert der Strecke zwischen den beiden Nullstellen, setzen diesen auf den Wert 8 und lösen die entstandene Gleichung nach t auf.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

e) *Bestimmung einer Fläche:*
Wir bilden das Integral von $h(x)$ im Intervall $I=[0;z]$. Dier Stammfunktion ist nicht aufzustellen, da mit $H(x)$ bereits gegeben, müssen also nur $H(z)-H(0)$ bilden. Da in H ein Faktor e^{-2x} enthalten ist, prüfen wir den Grenzwert dieses Faktors für $z\to\infty$, der dann Null ist. Dadurch ergibt sich auch der Grenzwert von $H(z)-H(0)$ für $z\to\infty$.

f) *Bestimmung der Extremstellen:*
Berechnung der Extremstellen über $f_t'(x)=0$.
Mittel der Strecke x_1x_2 zwischen den beiden Extremstellen:
Wir berechnen die Mitte der Strecke die sich aus dem Abstand der beiden Extremstellen x_1 und x_2 ergibt.

Klausuraufschrieb A1.1

a) *Schnittpunkt mit der y-Achse:*
$f_t(0)=(1-0)\cdot e^{-2\cdot 0}=1$
$S_y(0|1)$ ist unabhängig von t.
Graph von G_{10}:
Über Punktprobe mit $x_0=1$
$f_t(1)=(1-10)\cdot e^{-2}=-1{,}22$
Der Punkt $P(1|-1{,}22)$ liegt auf dem Graphen G_{10},also muss Graph II der Graph von G_{10} sein.

b) *Monotonienachweis G_0:*
$f_0(x)=e^{-2x}$
$f_0'(x)=-2e^{-2x}$
$f_0'(x)<0$ für alle $x\in\mathbb{R}$
f_0 ist streng monoton fallend und deshalb umkehrbar.
Funktionsgleichung der Umkehrung:
$y=e^{-2x} \quad | \quad ln$
$\ln(y)=-2x \quad | \quad :(-2)$
$x=-\frac{1}{2}\cdot\ln(y)$
$f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\cdot\ln(|x|)$

c) *Schnittwinkel der Tangente in $P(0{,}5|f(0{,}5))$ mit der x –Achse.*
$f_0'(0{,}5)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$
$\varphi=\arctan\left(-\frac{2}{e}\right)=-36{,}3\,°$
Schnittwinkel mit der -Achse werden linksdrehend, ausgehend von der Achse $y=0$ gezählt. Damit:
$\varphi^*=180\,°+\varphi=180\,°-36{,}3\,°=143{,}7\,°$.
Der Schnittwinkel beträgt $143{,}7\,°$.
Kathetenlängen eines Dreiecks.
Tangente:
$t(x)=-2e^{-1}x+c$
Punktprobe mit $P(0{,}5|f(0{,}5))$
$f(0{,}5)=-e^{-1}+c$
$e^{-1}=-e^{-1}+c$
$c=2e^{-1}$
$t(x)=-2e^{-1}x+2e^{-1}$

$S_y(0|2e^{-1})$
Nullstelle:
$-2e^{-1}x + 2e^{-1} = 0$
$x = 1$
$N_1 = (0|1)$
Die beiden Kathetenlängen des Dreiecks sind $a = 1$ und $b = 2e^{-1}$.
Interpretation einer Ungleichung:
Rotation um die x-Achse erzeugt Kegel mit $h = a$ und $r = b$.
$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
$V_{x-Achse} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2e^{-1} = \frac{2\pi}{3e}$
Rotation um die y-Achse erzeugt Kegel mit $h = b$ und $r = a$
$V_{y-Achse} = \frac{1}{3}\pi \cdot (2e^{-1})^2 \cdot 1 = \frac{4\pi}{3e^2}$
Die Ungleichung besagt, dass das Rotationsvolumen um die x-Achse größer ist als das um die y-Achse.

d) *Bestimmung Nullstellen in Abhängigkeit von t:*
$f_t(x) = 0$
$(1 - tx^2) \cdot e^{-2\cdot x} = 0$ | SvN
$1 - tx^2 = 0$
$tx^2 = 1$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{t}}$
t für Abstand 8:
$\sqrt{\frac{1}{t}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{t}}\right) = 8$
$2\sqrt{\frac{1}{t}} = 8$ ➔ $\sqrt{\frac{1}{t}} = 4$ ➔ $\frac{1}{t} = 16$
$t = \frac{1}{16}$

e) *Bestimmung einer Fläche:*
Fläche unter $h(x)$ im Intervall $I = [0; z]$:
$A = |\int_0^z h(x)\,dx| = \left|\left[\left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}\right]_0^z\right|$
$A = \left|\left(-z^2 + z + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2z} - \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot e^0\right|$
$A = \left|\left(-z^2 + z + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2z} - \frac{1}{2}\right|$
$\lim\limits_{z\to\infty} e^{-2z} = 0$
$A = \lim\limits_{z\to\infty} |\int_0^z h(x)\,dx| = \frac{1}{2}$

f) *Bestimmung der Extremstellen:*
$f_t'(x) = 0$
$u = 1 - tx^2$ $u' = -2tx$
$v = e^{-2x}$ $v' = -2e^{-2x}$
$f_t'(x) = -2txe^{-2x} - 2(1 - tx^2)e^{-2x}$
$f_t'(x) = -2e^{-2x}(tx + 1 - tx^2)$
$-tx^2 + tx + 1 = 0$
$x^2 - x - \frac{1}{t} = 0$
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + \frac{1}{t}}$

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Mittel der Strecke x_1x_2 zwischen den beiden Extremstellen:

$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0,5+\sqrt{0,25+\frac{1}{t}}+0,5-\sqrt{0,25+\frac{1}{t}}}{2} = \frac{1}{2}$

Damit liegt der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Geraden mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$.

Lösungslogik A1.2

a) *Steigung der Wendetangenten von f:*
Zur Bestimmung der Wendestelle bilden wir $f_k''(x)$, lösen $f_k''(x) = 0$ nach x auf.
Nun berechnen wir die Steigungen von f_k in den Wendestellen über $f_k'(x_w)$.
Die gesuchte Bedingung ist erfüllt, wenn alle $f_k'(x_w)$ denselben Wert aufweisen, also unabhängig von k sind.

b) *Bestimmung der Ortskurve $y = x$ für Hochpunkte im 1. Quadranten:*
Berechnung der Extremstellen über $f_k'(x) = 0$.
Da die Stammfunktion nicht gegeben ist, Berechnung der Stammfunktion zur Ermittlung der y-Werte zur Extremstelle im 1. Quadranten. Wegen unbekanntem Anfangswert der Stammfunktion, kann nun dieser über die Bedingung, dass alle Hochpunkte auf dem Graphen der Funktion $y = x$ liegen sollen, ermittelt werden.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Klausuraufschrieb A1.2

a) *Berechnung der Wendepunkte von f_K über $f_k''(x) = 0$:*

$f_k'(x) = -\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k) = -\frac{1}{k^2}(x^2+2kx-3k^2)$

$f_k''(x) = -\frac{1}{k^2}(2x+2k)$

$f_k''(x) = 0$

$2x + 2k = 0$ ➔ $x = -k$

Berechnung der Steigungen von f_K in den Wendestellen über $f_k'(-k)$:

$f_k'(-k) = -\frac{1}{k^2}(-k-k)(-k+3k) = \frac{2k\cdot(-2k)}{k^2} = -4$

Alle Wendetangenten haben dieselbe Steigung $m_t = -4$.

b) *Bestimmung der Ortskurve $y = x$ für Hochpunkte im 1. Quadranten:*

Extremstellen über $f_k'(x) = 0$

$-\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k) = 0$

$x_1 = k;\ \ x_2 = -3k$

Wegen Aufgabenstellung $k > 0$ ist $x = k$ gemeint.

Bestimmung der Stammfunktionen f_k

$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{3}x^3 + kx^2 - 3k^2x\right) + C$

Wir bilden $f_k(k)$.

$f_k(k) = -\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{1}{3}k^3 + k^3 - 3k^3\right) + C$

$f_k(k) = -\frac{k^2}{k^2}\left(\frac{1}{3}k + k - 3k\right) + C$

$f_k(k) = \frac{5}{3}k + C$

Es soll ja $y = x$ sein, somit muss $f_k(k) = k$ sein.

$k = \frac{5}{3}k + C$

$C = -\frac{2}{3}k$

$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3 + kx^2 - 3k^2x\right) - \frac{2}{3}k$

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Lösungslogik A2.1

a) *Koordinaten des nördlichsten Punktes P der Landstraße:*
Der nördlichste Punkt der Landstraße ist nach Aufgabenstellung der rechte Hochpunkt im I. Quadranten.
Bestimmung über die erste Ableitung mit $f'(x) = 0$ und $f(x_0)$ als Funktionswert.
Bedeutung VZW von f'' bei $x = 3$:
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Koordinaten zweier Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$:*
Ermittlung der Schnittpunkte der beiden Funktionen f und g durch Gleichsetzung.
Berechnung $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$ und Interpretation:
Ermittlung des Wertes des Integrals als Größe der Fläche zwischen Landstraße und Fahrradweg.

c) *Westlichster Punkt der Landstraße auf etwa 1890 Meter über NN:*
Aus der Grafik geht hervor, dass der westlichste Punkt bei $f(0) = 0$ liegt. Somit liegt die Höhe dieses Punktes bei $u(0)$.

d) *Berechnung des Gefälles eines Rohrs:*
Zunächst berechnen wir den Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten P und Q.
Sodann Ermittlung der Länge der Strecke $\overline{PQ}$ in der xy-Ebene. Das Gefälle des Rohres errechnet sich dann aus dem Quotienten des Höhenunterschiedes und der Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Klausuraufschrieb A2.1

a) *Koordinaten des nördlichsten Punktes P der Landstraße:*
Extremstellen über $f'(x) = 0$
$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{4}x + 9$
$\frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{4}x + 9 = 0 \quad | \quad \cdot \frac{8}{9}$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 4;\ \ x_2 = 2$
Gemäß Aufgabenstellung ist die linke Extremstelle der Hochpunkt.
$f(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^3 - \frac{27}{8} \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - \frac{13}{2} = 3 - 13{,}5 + 18 - 6{,}5 = 1$
Der nördlichste Punkt P der Landstraße hat die Koordinaten $P(2|1)$.

Bedeutung VZW von f'' bei $x = 3$:
f'' hat bei $x = 3$ eine Nullstelle mit VZW von „-“ nach „+„. Das bedeutet, dass f dort einen Wendepunkt besitzt und seine Krümmung von rechtsdrehend auf linksdrehend ändert.

b) *Koordinaten zweier Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$:*
Dies sind die Schnittpunkte von f und g.
$f(x)=g(x)$
$\frac{3}{8}x^3-\frac{27}{8}x^2+9x-\frac{13}{2}=-\frac{27}{8}x^2+\frac{75}{8}x-\frac{13}{2}$
$\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{8}x=0$
$x\left(\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{8}\right)=0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1=0$
$\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{8}=0$
$x^2=1$
$x_{2,3}=\pm 1$
Wegen Aufgabenstellung $0\le x\le\frac{9}{2}$ entfällt die Lösung $x_3=-1$.
$a=0;\quad b=1$
$f(0)=-\frac{13}{2}$
$f(1)=\frac{3}{8}-\frac{27}{8}+9-\frac{13}{2}=-\frac{1}{2}$
Die Punkte sind $A\left(0\middle|-\frac{13}{2}\right);\quad B\left(1\middle|-\frac{1}{2}\right)$. Der Fahrradweg kreuzt die Landstraße in diesen beiden Punkten.
Berechnung $\int_0^1(g(x)-f(x))\,dx$ und Interpretation:
$\int_0^1\left(-\frac{27}{8}x^2+\frac{75}{8}x-\frac{13}{2}-\left(\frac{3}{8}x^3-\frac{27}{8}x^2+9x-\frac{13}{2}\right)\right)dx=$
$\int_0^1(-\frac{3}{8}x^3+\frac{3}{8}x)\,dx=\left[-\frac{3}{32}x^4+\frac{3}{16}x^2\right]_0^1=-\frac{3}{32}+\frac{3}{16}=\frac{3}{32}$
Interpretation:
Die Fläche, die zwischen dem Fahrradweg und der Landstraße im Intervall von 0 bis 1 eingeschlossen wird, beträgt $\frac{3}{32}\,km^2$.

c) *Westlichster Punkt der Landstraße auf etwa 1890 Meter über NN:*
Der westlichste Punkt liegt bei $(0|f(0))$ und somit auch $r=0$.
$h(r)=u(f(0))$
$u(f(0))=2-\frac{1}{500}\left(-\frac{13}{2}-1\right)^2=1{,}8875\,km$
Der westlichste Punkt liegt etwa auf 1890 Meter über NN.

d) *Berechnung des Gefälles eines Rohrs:*
Um das Gefälle zu ermitteln, benötigen wir zunächst den Höhenunterschied zwischen Punkt P und Q:
Punkt P:
$u\big(f(2)\big)=u(1)$
$u(1)=2-\frac{1}{500}(1-1)^2=2\,km$
Punkt Q:
$u\big(f(0)\big)=1{,}8875\,km$ (siehe Aufgabenteil c)
Die beiden Punke P und Q haben somit die Koordinaten (incl. Höhe):
$P(2|1|2)$ und $Q\left(0\middle|-\frac{13}{2}\middle|1{,}8875\right)$
$\Delta u=u\big(f(2)\big)-u\big(f(0)\big)=2-1{,}8875=0{,}1125\,km$
Höhenunterschied $1125\,m$.
Länge der Strecke PQ in der xy-Ebene:

$\overline{PQ} = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2} = \sqrt{2^2 + 7{,}5^2} = 7{,}76\ km$

$m_{Rohr} = \frac{0{,}1125}{7{,}76,} = 0{,}014 = 1{,}4\ \%$

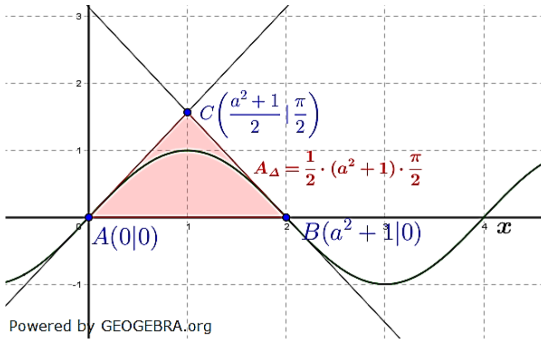
Das Gefälle des Rohres beträgt etwa $1{,}4\ \%$.

Lösungslogik A2.2

a) *Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung:*
Wir bilden $f_0'(x)$ jund berechnen $f_0'(0)$. Dies ist der Tangens des Steigungswinkels.

b) *Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird:*
Wir ermitteln die Periode von f_a über $p(a) = \frac{2\pi}{b}$ mit $b = \frac{\pi}{a^2+1}$.
Über $p'(a) = 0$ erhalten wir den Wert von a für den die Periode minimal ist.

c) *Bestimmung aller Werte von a, für die der Inhalt eines Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt:*
Wir bestimmen die Gleichung der Tangente an G_a in $x_0 = 0$.
Wir bestimmen die erste positive Nullstelle von G_a nach dem Ursprung.
Wir bestimmen die Gleichung der Tangente an G_a in dieser Nullstelle.
Wir schneiden die beiden Tangentengleichungen und stellen fest, dass sich die beiden Tangenten genau in der Mitte der Nullstelle $x_0 = 0$ und der ersten positiven Nullstelle zu liegen kommt, also an der Stelle der halben Periode.



Wir berechnen danach den y-Wert des Schnittpunktes und bestimmen nun die Fläche des Dreiecks über $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$.
Die Strecke g ist dabei der Abstand der beiden Nullstellen, die Höhe h_g ist der y-Wert des Schnittpunktes der beiden Tangenten.
Die Fläche ist dabei eine Funktion von a. Über die vorgegebene Fläche $2{,}5\pi$ kann daraus a errechnet werden.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Klausuraufschrieb A2.2

$f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$

a) *Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung:*

$f_0(x) = \sin(\pi \cdot x)$
$f_0'(0) = \pi$
$\varphi = \arctan(\pi) = 72{,}3\,°$

b) *Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird:*

$p(a) = \frac{2\pi}{b}$ mit $b = \frac{\pi}{a^2+1}$
$p(a) = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a^2+1}}$
$p(a) = 2a^2 + 2 = 2(a^2+1)$
$p'(a) = 4a$
$4a = 0$
$a = 0$
Für $a = 0$ ist die Periode von f_a minimal.

c) *Bestimmung aller Werte von a, für die der Inhalt eines Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt:*

Gleichung der Tangente an G_a in $x_0 = 0$:
$t_a(x) = f_a'(0) \cdot x + f_a(0)$
$f_a'(x) = \frac{\pi}{a^2+1} \cos\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$
$f_a'(0) = \frac{\pi}{a^2+1}$
$f_a(0) = 0$
$t_{a_0}(x) = \frac{\pi}{a^2+1} \cdot x$
Erste positive Nullstelle von f_a nach dem Ursprung.
$\sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right) = 0$
$x_1 = 0$
$\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x = \pi$
$x_2 = a^2 + 1$
Gesuchte Nullstelle $N(a^2+1|0)$
Gleichung der Tangente an G_a in $N(a^2+1|0)$:
$t_a(a^2+1) = f_a'(a^2+1) \cdot (x - a^2 - 1) + f_a(a^2+1)$
$f_a'(a^2+1) = \frac{\pi}{a^2+1} \cos\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot a^2 + 1\right) = -\frac{\pi}{a^2+1}$
$f_a(a^2+1) = \sin(\pi) = 0$
$t_{a_{a^2+1}}(x) = -\frac{\pi}{a^2+1} \cdot (x - a^2 - 1)$
Schnittpunkt von $t_{a_0}(x)$ und $t_{a_{a^2+1}}(x)$:
$\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x = -\frac{\pi}{a^2+1} \cdot (x - a^2 - 1)$
$\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x = -\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x + \frac{\pi(a^2+1)}{a^2+1} \quad | \quad + \frac{\pi}{a^2+1} \cdot x$
$\frac{2\pi}{a^2+1} \cdot x = \pi$
$x = \frac{a^2+1}{2}$

Wegen $p = 2(a^2 + 1)$ befindet sich die Schnittstelle genau in der Mitte der beiden Nullstellen.
Bestimmung des y-Wertes des Schnittpunktes:
$t_{a_0}\left(\frac{a^2+1}{2}\right) = \frac{\pi}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{2} = \frac{\pi}{2}$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$
a für $A_{Dreieck} = 2{,}5\pi$:
$\frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) \cdot \frac{\pi}{2} = 2{,}5\pi$
$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} = 2{,}5 = \frac{10}{4}$
$\frac{1}{4}a^2 = \frac{9}{4}$
$a_{1,2} = \pm 3$