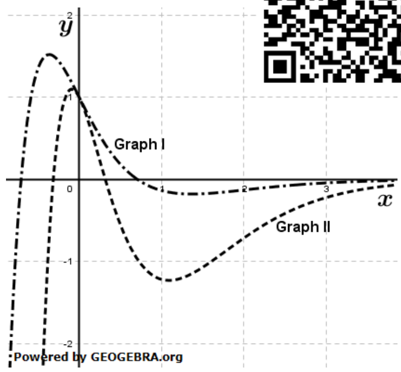
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Aufgabe A1.1

Für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist G_t der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = (1 - tx^2) \cdot e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$.



a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y -Achse unabhängig von t ist.
Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} darstellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist.
Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an.

c) Betrachtet wird die Tangente an G_0 im Punkt $B_0(0{,}5|f(0{,}5))$.
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse.
Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt.
Bei Rotation dieses Dreiecks um die x- bzw. y-Achse entsteht jeweils ein Körper. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch:
$$\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}.$$

d) Für einen bestimmten Wert von t besitzt der Graph G_t zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 8 haben.
Berechnen Sie diesen Wert von t.

e) Die Funktion H mit $H(x) = \left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von h mit $h(x) = f_t(x) + f_{t+2}(x)$. Die Graphen G_t und G_{t+2} besitzen für $x > 0$ keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

f) Für jedes $t > 0$ hat der Graph G_t zwei Extrempunkte P_t und Q_t.
Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ liegt.

Aufgabe A1.2

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit $k > 0$, deren Ableitungsfunktionen $f_k{}'$ folgende Gleichung besitzen:
$$f_k'(x) = -\frac{1}{k^2}(x - k)(x + 3k)$$

a) Jeder Graph der Schar besitzt einen Wendepunkt. Betrachtet werden die Tangenten in diesen Wendepunkten. Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind.

b) Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt im ersten Quadranten. Alle diese Extrempunkte liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f_k.

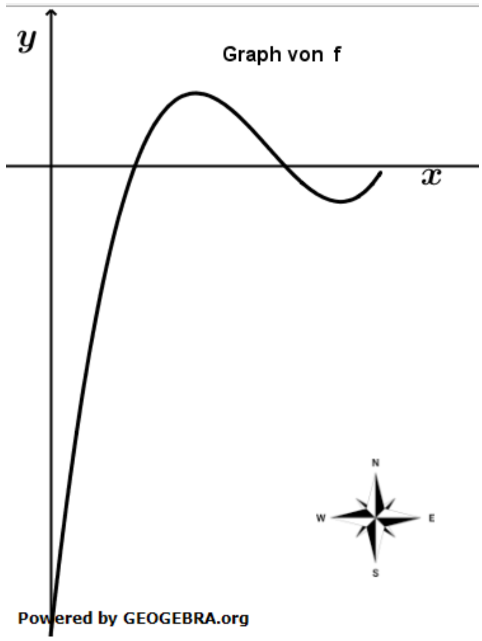
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Aufgabe A2.1

Die Abbildung stellt die Planskizze einer Landstraße dar. Der Verlauf dieser Landstraße wird durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2};\ \ 0 \leq x \leq \frac{9}{2}$$

beschrieben. Die positive y-Achse beschreibt dabei die Himmelsrichtung Norden, die positive x-Achse die Himmelsrichtung Osten. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts P, der den nördlichsten Punkt der Landstraße darstellt.
An der Stelle $x_0 = 3$ wechselt das Vorzeichen der Funktion f'' vom Negativen ins Positive. Beschreiben Sie, was dies für den Verlauf der Landstraße bedeutet. (Teilergebnis: $P(2|1)$).

b) Ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{27}{8}x^2 + \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$ stellt einen Fahrradweg dar, der zwei Punkte der Landstraße verbindet. Diese beiden Punkte werden durch $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ mit $a < b$ dargestellt.
Bestimmen Sie die Koordinaten von A und B (Teilergebnis: $a = 0$ und $b = 1$).
Berechnen Sie $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Im Folgenden wird auch der Höhenverlauf der Landstraße betrachtet. Stellt $R(r|f(r))$ einen Punkt auf der Landstraße dar, so gilt für seine Höhe $h(r)$:

$$h(r) = u(f(r)) \text{ mit } u(x) = 2 - \frac{1}{500}(x-1)^2$$

$h(r)$ in Kilometer über der Meereshöhe.

c) Zeigen Sie, dass der westlichste Punkt der Landstraße auf einer Höhe von etwa 1890 Meter liegt.
Begründen Sie, dass kein Punkt der Landstraße höher als 2000 Meter liegt.
Der am höchsten gelegene Punkt auf der Landstraße wird durch den Punkt S auf dem Graphen von f dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

d) Zum Abfluss von Regenwasser sind die durch $P(2|1)$ und $Q(0|f(0))$ dargestellten Punkte auf der Landstraße durch ein geradlinig verlaufendes Rohr verbunden. Berechnen Sie das Gefälle dieses Rohrs.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Aufgabe A2.2

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung.

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird.

c) Die Tangente an G_a an der Stelle $x_0 = 0$ und die Tangente an G_a an der kleinsten positiven Nullstelle von f_a schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein.
Bestimmen Sie alle Werte von a, für die der Inhalt dieses Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt.