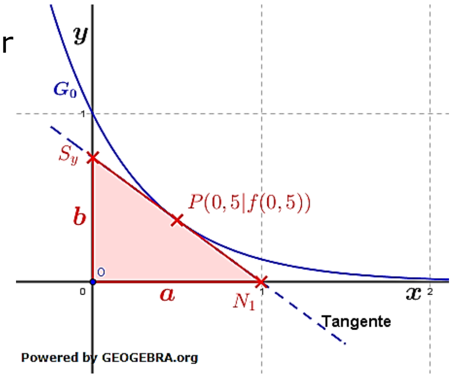
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Lösungslogik A1.1

a) *Schnittpunkt mit der y-Achse:*
Wir berechnen $f(0)$.
Graph von G_{10}:
Wir berechnen den y-Wert an einer gut ablesbaren x-Stelle, z.B. $x_0 = 1$.

b) *Monotonienachweis G_0:*
Wir bilden die $f_0'(x)$ und prüfen, ob sich im Verlauf des Graphen der Ableitung eine Nullstelle befindet.
Funktionsgleichung der Umkehrung:
Wir stellen $f_0(x)$ nach x um. Nach erfolgter Umstellung vertauschen wir die Variablen x und y wieder und erhalten damit die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

c) *Schnittwinkel der Tangente in $P(0{,}5|f(0{,}5))$ mit der x –Achse.*
Wir berechnen die Steigung des Graphen von f_0 an der Stelle $x_0 = 0{,}5$. Dies ist der Tangens des Schnittwinkels der Tangente mit der x-Achse. Ein Schnittwinkel mit der x-Achse wird stets von der in positiver x-Richtung der x-Achse ausgehend linksdrehend gezählt. Somit können auch Winkel $> 90\,°$ vorkommen.
Achtung: Bei der Berechnung des Winkels über die TR-Funktion $\tan^{-1}$ muss der TR auf Gradmaß stehen.



Kathetenlängen eines Dreiecks.
Wir stellen die Tangentengleichung im Punkt $P(0{,}5|f(0{,}5))$ auf. Der Abstand vom Ursprung bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist die Länge der einen Kathete, der Abstand vom Ursprung bis zum Schnittpunkt mit der y-Achse die Länge der zweiten Kathete.
Interpretation einer Ungleichung:
Bei Rotation des Dreiecks um die x-Achse als auch um die y-Achse entsteht ein Kegel. Die Volumenformel eines Kegels lautet $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.
Bei der Rotation um die x-Achse entspricht die Kathete a der Höhe und die Kathete b dem Radius dieses Kegels.
Bei der Rotation um die y-Achse entspricht die Kathete a dem Radius und die Kathete b der Höher dieses Kegels.
Die Ungleichung sagt aus, welche der beiden Volumina das Größere ist.

d) *Bestimmung Nullstellen in Abhängigkeit von t:*
Wir berechnen die Lage der beiden Nullstellen mit $f_t(x) = 0$.
t für Abstand 8:
Wir bilden den Wert der Strecke zwischen den beiden Nullstellen, setzen diesen auf den Wert 8 und lösen die entstandene Gleichung nach t auf.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

e) *Bestimmung einer Fläche:*
Wir bilden das Integral von $h(x)$ im Intervall $I = [0; z]$. Dier Stammfunktion ist nicht aufzustellen, da mit $H(x)$ bereits gegeben, müssen also nur $H(z) - H(0)$ bilden. Da in H ein Faktor e^{-2x} enthalten ist, prüfen wir den Grenzwert dieses Faktors für $z \to \infty$, der dann Null ist. Dadurch ergibt sich auch der Grenzwert von $H(z) - H(0)$ für $z \to \infty$.

f) *Bestimmung der Extremstellen:*
Berechnung der Extremstellen über $f_t'(x) = 0$.
Mittel der Strecke $x_1 x_2$ zwischen den beiden Extremstellen:
Wir berechnen die Mitte der Strecke die sich aus dem Abstand der beiden Extremstellen x_1 und x_2 ergibt.

Klausuraufschrieb A1.1

a) *Schnittpunkt mit der y-Achse:*
$f_t(0) = (1 - 0) \cdot e^{-2\cdot 0} = 1$
$S_y(0|1)$ ist unabhängig von t.
Graph von G_{10}:
Über Punktprobe mit $x_0 = 1$
$f_t(1) = (1 - 10) \cdot e^{-2} = -1{,}22$
Der Punkt $P(1|-1{,}22)$ liegt auf dem Graphen G_{10},also muss Graph II der Graph von G_{10} sein.

b) *Monotonienachweis G_0:*
$f_0(x) = e^{-2x}$
$f_0'(x) = -2e^{-2x}$
$f_0'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
f_0 ist streng monoton fallend und deshalb umkehrbar.
Funktionsgleichung der Umkehrung:
$y = e^{-2x} \quad | \quad ln$
$\ln(y) = -2x \quad | \quad :(-2)$
$x = -\frac{1}{2} \cdot \ln(y)$
$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(|x|)$

c) *Schnittwinkel der Tangente in $P(0{,}5|f(0{,}5))$ mit der x –Achse.*
$f_0'(0{,}5) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$
$\varphi = \arctan\left(-\frac{2}{e}\right) = -36{,}3\,°$
Schnittwinkel mit der -Achse werden linksdrehend, ausgehend von der Achse $y = 0$ gezählt. Damit:
$\varphi^* = 180\,° + \varphi = 180\,° - 36{,}3\,° = 143{,}7\,°$.
Der Schnittwinkel beträgt $143{,}7\,°$.
Kathetenlängen eines Dreiecks.
Tangente:
$t(x) = -2e^{-1}x + c$
Punktprobe mit $P(0{,}5|f(0{,}5))$
$f(0{,}5) = -e^{-1} + c$
$e^{-1} = -e^{-1} + c$
$c = 2e^{-1}$
$t(x) = -2e^{-1}x + 2e^{-1}$

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

$S_y(0|2e^{-1})$
Nullstelle:
$-2e^{-1}x + 2e^{-1} = 0$
$x = 1$
$N_1 = (0|1)$
Die beiden Kathetenlängen des Dreiecks sind $a = 1$ und $b = 2e^{-1}$.
Interpretation einer Ungleichung:
Rotation um die x-Achse erzeugt Kegel mit $h = a$ und $r = b$.
$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
$V_{x-Achse} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2e^{-1} = \frac{2\pi}{3e}$
Rotation um die y-Achse erzeugt Kegel mit $h = b$ und $r = a$
$V_{y-Achse} = \frac{1}{3}\pi \cdot (2e^{-1})^2 \cdot 1 = \frac{4\pi}{3e^2}$
Die Ungleichung besagt, dass das Rotationsvolumen um die x-Achse größer ist als das um die y-Achse.

d) *Bestimmung Nullstellen in Abhängigkeit von t:*
$f_t(x) = 0$
$(1 - tx^2) \cdot e^{-2 \cdot x} = 0 \qquad | \qquad \text{SvN}$
$1 - tx^2 = 0$
$tx^2 = 1$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{t}}$
t für Abstand 8:
$\sqrt{\frac{1}{t}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{t}}\right) = 8$
$2\sqrt{\frac{1}{t}} = 8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{t}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t} = 16$
$t = \frac{1}{16}$

e) *Bestimmung einer Fläche:*
Fläche unter $h(x)$ im Intervall $I = [0; z]$:
$A = |\int_0^z h(x)\,dx| = \left|\left[\left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}\right]_0^z\right|$
$A = \left|\left(-z^2 + z + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2z} - \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot e^0\right|$
$A = \left|\left(-z^2 + z + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2z} - \frac{1}{2}\right|$
$\lim\limits_{z\to\infty} e^{-2z} = 0$
$A = \lim\limits_{z\to\infty} |\int_0^z h(x)\,dx| = \frac{1}{2}$

f) *Bestimmung der Extremstellen:*
$f_t'(x) = 0$
$u = 1 - tx^2 \qquad u' = -2tx$
$v = e^{-2x} \qquad v' = -2e^{-2x}$
$f_t'(x) = -2txe^{-2x} - 2(1 - tx^2)e^{-2x}$
$f_t'(x) = -2e^{-2x}(tx + 1 - tx^2)$
$-tx^2 + tx + 1 = 0$
$x^2 - x - \frac{1}{t} = 0$
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + \frac{1}{t}}$

Mittel der Strecke x_1x_2 zwischen den beiden Extremstellen:

$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0{,}5+\sqrt{0{,}25+\frac{1}{t}}+0{,}5-\sqrt{0{,}25+\frac{1}{t}}}{2} = \frac{1}{2}$

Damit liegt der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Geraden mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$.

Lösungslogik A1.2

a) *Steigung der Wendetangenten von f:*
Zur Bestimmung der Wendestelle bilden wir $f_k''(x)$, lösen $f_k''(x) = 0$ nach x auf.
Nun berechnen wir die Steigungen von f_k in den Wendestellen über $f_k'(x_w)$.
Die gesuchte Bedingung ist erfüllt, wenn alle $f_k'(x_w)$ denselben Wert aufweisen, also unabhängig von k sind.

b) *Bestimmung der Ortskurve $y = x$ für Hochpunkte im 1. Quadranten:*
Berechnung der Extremstellen über $f_k'(x) = 0$.
Da die Stammfunktion nicht gegeben ist, Berechnung der Stammfunktion zur Ermittlung der y-Werte zur Extremstelle im 1. Quadranten. Wegen unbekanntem Anfangswert der Stammfunktion, kann nun dieser über die Bedingung, dass alle Hochpunkte auf dem Graphen der Funktion $y = x$ liegen sollen, ermittelt werden.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Klausuraufschrieb A1.2

a) *Berechnung der Wendepunkte von f_K über $f_k''(x) = 0$:*

$f_k'(x) = -\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k) = -\frac{1}{k^2}(x^2+2kx-3k^2)$

$f_k''(x) = -\frac{1}{k^2}(2x+2k)$

$f_k''(x) = 0$

$2x + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -k$

Berechnung der Steigungen von f_K in den Wendestellen über $f_k'(-k)$:

$f_k'(-k) = -\frac{1}{k^2}(-k-k)(-k+3k) = \frac{2k\cdot(-2k)}{k^2} = -4$

Alle Wendetangenten haben dieselbe Steigung $m_t = -4$.

b) *Bestimmung der Ortskurve $y = x$ für Hochpunkte im 1. Quadranten:*

Extremstellen über $f_k'(x) = 0$

$-\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k) = 0$

$x_1 = k;\ \ x_2 = -3k$

Wegen Aufgabenstellung $k > 0$ ist $x = k$ gemeint.

Bestimmung der Stammfunktionen f_k

$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{3}x^3 + kx^2 - 3k^2x\right) + C$

Wir bilden $f_k(k)$.

$f_k(k) = -\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{1}{3}k^3 + k^3 - 3k^3\right) + C$

$f_k(k) = -\frac{k^2}{k^2}\left(\frac{1}{3}k + k - 3k\right) + C$

$f_k(k) = \frac{5}{3}k + C$

Es soll ja $y = x$ sein, somit muss $f_k(k) = k$ sein.

$k = \frac{5}{3}k + C$

$C = -\frac{2}{3}k$

$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3 + kx^2 - 3k^2x\right) - \frac{2}{3}k$

Lösungslogik A2.1

a) *Koordinaten des nördlichsten Punktes P der Landstraße:*
Der nördlichste Punkt der Landstraße ist nach Aufgabenstellung der rechte Hochpunkt im I. Quadranten.
Bestimmung über die erste Ableitung mit $f'(x) = 0$ und $f(x_0)$ als Funktionswert.
Bedeutung VZW von f'' bei $x = 3$:
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Koordinaten zweier Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$:*
Ermittlung der Schnittpunkte der beiden Funktionen f und g durch Gleichsetzung.
Berechnung $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$ und Interpretation:
Ermittlung des Wertes des Integrals als Größe der Fläche zwischen Landstraße und Fahrradweg.

c) *Westlichster Punkt der Landstraße auf etwa 1890 Meter über NN:*
Aus der Grafik geht hervor, dass der westlichste Punkt bei $f(0) = 0$ liegt. Somit liegt die Höhe dieses Punktes bei $u(0)$.

d) *Berechnung des Gefälles eines Rohrs:*
Zunächst berechnen wir den Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten P und Q.
Sodann Ermittlung der Länge der Strecke $\overline{PQ}$ in der xy-Ebene. Das Gefälle des Rohres errechnet sich dann aus dem Quotienten des Höhenunterschiedes und der Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Klausuraufschrieb A2.1

a) *Koordinaten des nördlichsten Punktes P der Landstraße:*
Extremstellen über $f'(x) = 0$
$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{4}x + 9$
$\frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{4}x + 9 = 0 \qquad | \quad \cdot \frac{8}{9}$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \qquad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 4;\ \ x_2 = 2$
Gemäß Aufgabenstellung ist die linke Extremstelle der Hochpunkt.
$f(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^3 - \frac{27}{8} \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - \frac{13}{2} = 3 - 13{,}5 + 18 - 6{,}5 = 1$
Der nördlichste Punkt P der Landstraße hat die Koordinaten $P(2|1)$.

Bedeutung VZW von f'' bei $x = 3$:
f'' hat bei $x = 3$ eine Nullstelle mit VZW von „-" nach „+„. Das bedeutet, dass f dort einen Wendepunkt besitzt und seine Krümmung von rechtsdrehend auf linksdrehend ändert.

b) *Koordinaten zweier Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$:*
Dies sind die Schnittpunkte von f und g.
$f(x) = g(x)$
$\frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2} = -\frac{27}{8}x^2 + \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$
$\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{8}x = 0$
$x\left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8} = 0$
$x^2 = 1$
$x_{2,3} = \pm 1$
Wegen Aufgabenstellung $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ entfällt die Lösung $x_3 = -1$.
$a = 0;\quad b = 1$
$f(0) = -\frac{13}{2}$
$f(1) = \frac{3}{8} - \frac{27}{8} + 9 - \frac{13}{2} = -\frac{1}{2}$
Die Punkte sind $A\left(0\middle|-\frac{13}{2}\right);\quad B\left(1\middle|-\frac{1}{2}\right)$. Der Fahrradweg kreuzt die Landstraße in diesen beiden Punkten.
Berechnung $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$ und Interpretation:
$\int_0^1 \left(-\frac{27}{8}x^2 + \frac{75}{8}x - \frac{13}{2} - \left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2}\right)\right) dx =$
$\int_0^1 (-\frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{8}x)\,dx = \left[-\frac{3}{32}x^4 + \frac{3}{16}x^2\right]_0^1 = -\frac{3}{32} + \frac{3}{16} = \frac{3}{32}$
Interpretation:
Die Fläche, die zwischen dem Fahrradweg und der Landstraße im Intervall von 0 bis 1 eingeschlossen wird, beträgt $\frac{3}{32}\ km^2$.

c) *Westlichster Punkt der Landstraße auf etwa 1890 Meter über NN:*
Der westlichste Punkt liegt bei $(0|f(0))$ und somit auch $r = 0$.
$h(r) = u(f(0))$
$u(f(0)) = 2 - \frac{1}{500}\left(-\frac{13}{2} - 1\right)^2 = 1{,}8875\ km$
Der westlichste Punkt liegt etwa auf 1890 Meter über NN.

d) *Berechnung des Gefälles eines Rohrs:*
Um das Gefälle zu ermitteln, benötigen wir zunächst den Höhenunterschied zwischen Punkt P und Q:
Punkt P:
$u\big(f(2)\big) = u(1)$
$u(1) = 2 - \frac{1}{500}(1-1)^2 = 2\ km$
Punkt Q:
$u\big(f(0)\big) = 1{,}8875\ km$ (siehe Aufgabenteil c)
Die beiden Punke P und Q haben somit die Koordinaten (incl. Höhe):
$P(2|1|2)$ und $Q\left(0\middle|-\frac{13}{2}\middle|1{,}8875\right)$
$\Delta u = u\big(f(2)\big) - u\big(f(0)\big) = 2 - 1{,}8875 = 0{,}1125\ km$
Höhenunterschied $1125\ m$.
Länge der Strecke PQ in der xy-Ebene:

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{2^2 + 7{,}5^2} = 7{,}76\ km$

$m_{Rohr} = \frac{0{,}1125}{7{,}76,} = 0{,}014 = 1{,}4\ \%$

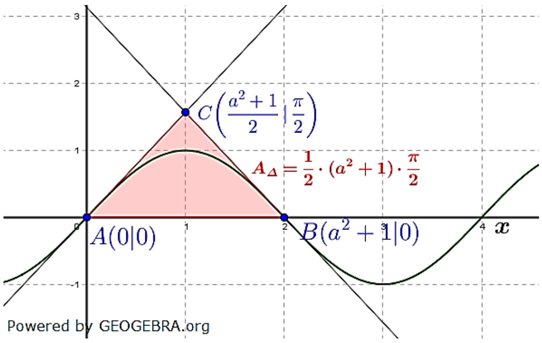
Das Gefälle des Rohres beträgt etwa $1{,}4\ \%$.

Lösungslogik A2.2

a) *Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung:*
Wir bilden $f_0'(x)$ jund berechnen $f_0'(0)$. Dies ist der Tangens des Steigungswinkels.

b) *Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird:*
Wir ermitteln die Periode von f_a über $p(a) = \frac{2\pi}{b}$ mit $b = \frac{\pi}{a^2+1}$.
Über $p'(a) = 0$ erhalten wir den Wert von a für den die Periode minimal ist.

c) *Bestimmung aller Werte von a, für die der Inhalt eines Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt:*
Wir bestimmen die Gleichung der Tangente an G_a in $x_0 = 0$.
Wir bestimmen die erste positive Nullstelle von G_a nach dem Ursprung.
Wir bestimmen die Gleichung der Tangente an G_a in dieser Nullstelle.
Wir schneiden die beiden Tangentengleichungen und stellen fest, dass sich die beiden Tangenten genau in der Mitte der Nullstelle $x_0 = 0$ und der ersten positiven Nullstelle zu liegen kommt, also an der Stelle der halben Periode.



Wir berechnen danach den y-Wert des Schnittpunktes und bestimmen nun die Fläche des Dreiecks über $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$.
Die Strecke g ist dabei der Abstand der beiden Nullstellen, die Höhe h_g ist der y-Wert des Schnittpunktes der beiden Tangenten.
Die Fläche ist dabei eine Funktion von a. Über die vorgegebene Fläche $2{,}5\pi$ kann daraus a errechnet werden.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Klausuraufschrieb A2.2

$f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$

a) *Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung:*

$f_0(x) = \sin(\pi \cdot x)$
$f_0{}'(0) = \pi$
$\varphi = \arctan(\pi) = 72{,}3\,°$

b) *Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird:*

$p(a) = \frac{2\pi}{b}$ mit $b = \frac{\pi}{a^2+1}$
$p(a) = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a^2+1}}$
$p(a) = 2a^2 + 2 = 2(a^2+1)$
$p'(a) = 4a$
$4a = 0$
$a = 0$
Für $a = 0$ ist die Periode von f_a minimal.

c) *Bestimmung aller Werte von a, für die der Inhalt eines Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt:*

Gleichung der Tangente an G_a in $x_0 = 0$:
$t_a(x) = f_a'(0) \cdot x + f_a(0)$
$f_a'(x) = \frac{\pi}{a^2+1} \cos\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$
$f_a'(0) = \frac{\pi}{a^2+1}$
$f_a(0) = 0$
$t_{a_0}(x) = \frac{\pi}{a^2+1} \cdot x$
Erste positive Nullstelle von f_a nach dem Ursprung.
$\sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right) = 0$
$x_1 = 0$
$\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x = \pi$
$x_2 = a^2 + 1$
Gesuchte Nullstelle $N(a^2+1|0)$
Gleichung der Tangente an G_a in $N(a^2+1|0)$:
$t_a(a^2+1) = f_a'(a^2+1) \cdot (x - a^2 - 1) + f_a(a^2+1)$
$f_a{}'(a^2+1) = \frac{\pi}{a^2+1} \cos\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot a^2 + 1\right) = -\frac{\pi}{a^2+1}$
$f_a(a^2+1) = \sin(\pi) = 0$
$t_{a_{a^2+1}}(x) = -\frac{\pi}{a^2+1} \cdot (x - a^2 - 1)$
Schnittpunkt von $t_{a_0}(x)$ und $t_{a_{a^2+1}}(x)$:
$\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x = -\frac{\pi}{a^2+1} \cdot (x - a^2 - 1)$
$\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x = -\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x + \frac{\pi(a^2+1)}{a^2+1} \quad | \quad + \frac{\pi}{a^2+1} \cdot x$
$\frac{2\pi}{a^2+1} \cdot x = \pi$
$x = \frac{a^2+1}{2}$

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2023 BW

Wegen $p = 2(a^2+1)$ befindet sich die Schnittstelle genau in der Mitte der beiden Nullstellen.
Bestimmung des y-Wertes des Schnittpunktes:
$t_{a_0}\left(\frac{a^2+1}{2}\right) = \frac{\pi}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{2} = \frac{\pi}{2}$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot (a^2+1) \cdot \frac{\pi}{2}$
a für $A_{Dreieck} = 2{,}5\pi$:
$\frac{1}{2} \cdot (a^2+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 2{,}5\pi$
$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} = 2{,}5 = \frac{10}{4}$
$\frac{1}{4}a^2 = \frac{9}{4}$
$a_{1,2} = \pm 3$