Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Aufgabe B1

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Die Eckpunkte der Grundfläche sind $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$ und die Spitze ist $S(0|0|6)$.
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und S.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide.
(Teilergebnis: $E\colon\ 2x_2 - x_3 = -6$)

b) Innerhalb der Pyramide gibt es einen Punkt, dessen Abstand von der Grundfläche der Pyramide $\sqrt{5}$-mal so groß ist wie sein Abstand zu den Seitenflächen.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

c) Betrachtet wird für jedes $a > 0$ die gerade Pyramide mit folgenden Eigenschaften:
- $A(-a|-a|0)$, $B(a|-a|0)$, $C(a|a|0)$ und D sind die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche.
- Die x_3-Koordinate der Spitze S ist positiv.
- Die Höhe der Pyramide stimmt mit der Kantenlänge der Grundfläche überein.

M_1 ist die Kantenmitte von AB, M_2 die Kantenmitte von DS.
Zeigen Sie: Die Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Aufgabe B2

Eine Firma stellt Gewächshäuser her. Die Ecken der Grundfläche dieser Gewächshäuser können modellhaft durch die Punkte $A(8|0|0)$, $B(8|7|0)$, $C(0|7|0)$ und $D(0|0|0)$ beschrieben werden. In diesen Ecken stehen senkrecht zur Grundfläche Pfosten, die das Dach des Gewächshauses tragen (alle Koordinatenangaben in Meter).

a) Bei einem dieser Gewächshäuser können die Ecken der Dachfläche durch die Punkte $E(8|0|4)$, $F(8|7|5)$, $G(0|7|5)$ und $H(0|0|4)$ beschrieben werden.
Stellen Sie dieses Gewächshaus in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Gewächshauses.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Lage der Dachfläche beschreibt.

b) Die Firma bietet die Gewächshäuser mit unterschiedlichen Neigungen der Dachfläche an. Die Lage jeder dieser Dachflächen kann durch eine Ebene beschrieben werden, die zur Schar $E_a: ax_2 - 7x_3 = 7a - 35$ mit $a > 0$ gehört.
Berechnen Sie den Wert von a, für den die Neigung der Dachfläche $30°$ beträgt.
Es gibt eine Gerade g, die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden g.
Untersuchen Sie, für welche Werte von a im gesamten Gewächshaus eine Mindesthöhe von $2\,m$ gegeben ist.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Lösungslogik B1

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Koordinatengleichung der Ebene E:
Wir bilden den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$, stellen daraus die Koordinatengleichung auf und berechnen noch über eine Punktprobe mit einem der drei Punkte den Parameter d.

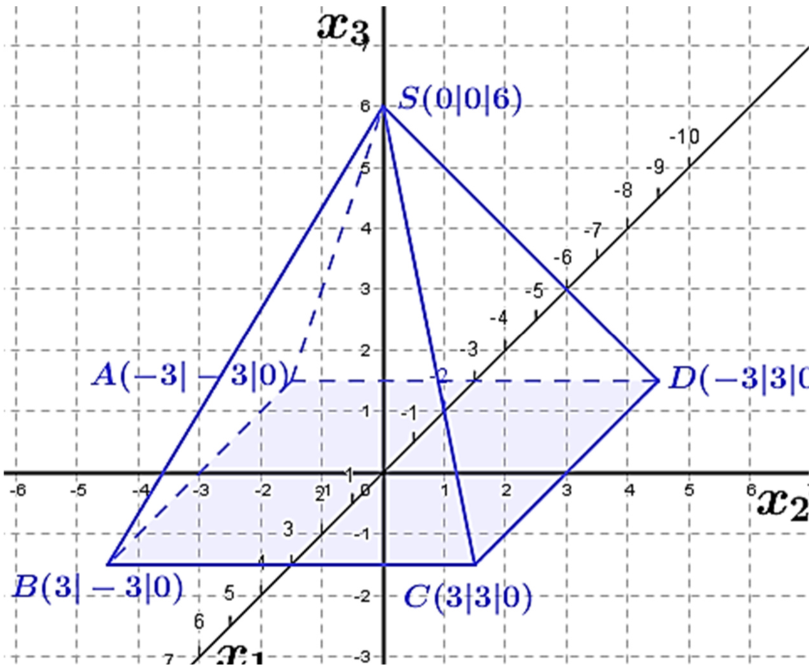
Oberflächeninhalt der Pyramide:
Wir berechnen die Grundfläche und danach die Fläche der vier Seitendreiecke. Die Fläche eines Seitendreiecks entspricht dabei $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}|$.

b) *Koordinaten eines Punktes im Innern der Pyramide:*
Der Abstand zu den Seitenflächen sei h. Dann hat der Punkt die Koordinaten $P(0|0|\sqrt{5} \cdot h)$.
Wir berechnen den Abstand dieses Punktes zu einer Seitenfläche über die HNF.

c) *Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS:*
Wir bestimmen die Koordinaten der Punkte M_1 und M_2, bilden den Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ und den Vektor $\overrightarrow{DS}$. Orthogonalität ist gegeben, wenn $\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{DS} = 0$.

Klausuraufschrieb B1

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Koordinatengleichung der Ebene E:

$E\colon\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -3-(-3) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 0-(-3) \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} = -18 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 2x_2 - x_3 = d$

$2 \cdot (-3) - 0 = d$ ➔ $d = -6$

$E\colon\ 2x_2 - x_3 = -6$

Oberflächeninhalt der Pyramide:

$O = G + 2 \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right|$

Grundfläche ist ein Quadrat mit der Länge einer Seitenkante von $6\,LE$.

$G = 36\,FE$

$$2 \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \sqrt{36^2 + 18^2} = 2 \cdot 40{,}25 = 80{,}5$$

$O = 36 + 80{,}5 = 116{,}5\,FE$

b) *Koordinaten eines Punktes im Innern der Pyramide:*

Der Abstand des Punktes zu einem Seitendreieck sei h. Dann hat der Punkt die Koordinaten $P\left(0\middle|0\middle|\sqrt{5} \cdot h\right)$

Wir bestimmen den Abstand zum Seitendreieck ABS über die HNF:

$E\colon\ \frac{2x_2 - x_3 + 6}{\sqrt{4+1}} = 0$ | Hessesche Normalform

$d(P; E) = h = \frac{|2 \cdot 0 - \sqrt{5} \cdot h + 6|}{\sqrt{5}} = |-h + 6|$

$h = |-h + 6|$

$h_1 = -h_1 + 6$

$2h_1 = 6$

$h_1 = 3$

$h_2 = h_2 - 6$

$0 \neq -6$ ➔ keine Lösung

Der Punkt hat die Koordinaten $P\left(0\middle|0|3 \cdot \sqrt{5}\right)$

c) *Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS:*

M_1 Kantenmitte von AB

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -a+a \\ -a-a \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

M_2 Kantenmitte von DS

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -a+0 \\ a+0 \\ 0+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ \frac{a}{2} + a \\ a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix}$$

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0-(-a) \\ 0-a \\ 2a-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} = -\frac{a^2}{2} - \frac{3}{2}a^2 + 2a^2 = 0$$

Lösungslogik B2

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Rauminhalt des Gewächshauses:
Wir betrachten das Gewächshaus als Prisma mit der Grundfläche eines Trapezes (Viereck $ABFE$) und der Höhe $8\,LE$ (Kante AD bzw. BC).

Koordinatengleichung der Ebene der Dachfläche:
Wir bilden den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EH}$, stellen daraus die Koordinatengleichung auf und berechnen noch über eine Punktprobe mit einem der drei Punkte den Parameter d.

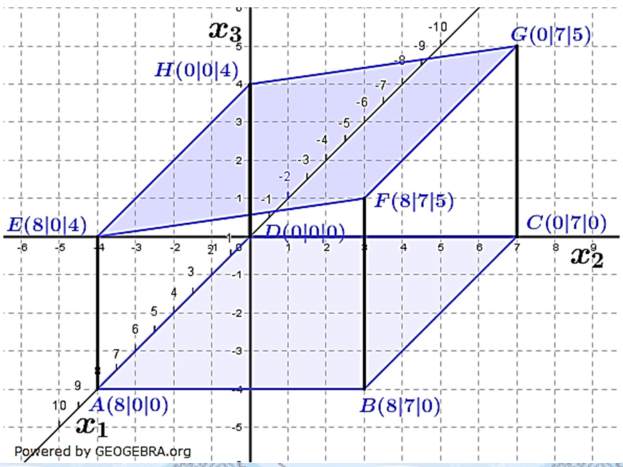
b) *Wert von a, für den die Neigung der Dachfläche $30\,°$ beträgt.*
Wir berechnen den Schnittwinkel der Dachfläche mit der Grundfläche über $\cos(\varphi) = \frac{|n_1 \circ n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}$, setzen $\varphi = 30\,°$ und lösen die Gleichung nach a auf.

Parametergleichung der Gerade g, die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt.
Wir schneiden eine Ebene E_{a_1} mit einer Ebene E_{a_2}.

a für Mindesthöhe von $2\,m$ im gesamten Gewächshaus:
Die Dachfläche dreht sich ja um die soeben ermittelte Schnittgerade. Der Aufpunkt der Schnittgeraden fällt mit dem Punkt G zusammen, sodass im hinteren Bereich sich die Höhe nicht verändert. Die Höhe des Gewächshauses kann somit nur im vorderen (linken) Bereich verändert werden. Der Spurpunkt jeder Ebene E_a hat die Koordinaten $S_{x_3}(0|0|h_3)$, wobei $h_3 \geq 2$ sein soll (Aufgabenstellung).

Klausuraufschrieb B2

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Rauminhalt des Gewächshauses:

$V_{Prisma} = G \cdot h_{Prisma}$

$G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{Trapez}$ mit $a = AE = 4\,LE$, $c = BF = 5\,LE$ und $h_{Trapez} = AB = 7\,LE$

$G = \frac{1}{2} \cdot (4 + 5) \cdot 7 = 31{,}5\,FE$

$V_{Prisma} = 31{,}5 \cdot 8 = 252\,VE$

Das Volumen des Gewächshauses beträgt $252\,m^3$.

Koordinatengleichung der Ebene der Dachfläche:

$E\colon\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 7-0 \\ 5-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 56 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$E\colon\ x_2 - 7x_3 = d$

$0 - 7 \cdot 4 = d \quad \Rightarrow \quad d = -28$

$E\colon\ 2 - 7x_3 = -28$

b) *Wert von* a, *für den die Neigung der Dachfläche* $30\,°$ *beträgt.*

$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ mit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -7 \end{pmatrix}$

$\varphi = 30° \quad \Rightarrow \quad cos(30\,°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -7 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\frac{|-7|}{\sqrt{a^2+49}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

$14 = \sqrt{3a^2 + 147}$

$196 = 3a^2 + 147$

$3a^2 = 49$

$a^2 = \frac{49}{3}$

$a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{49}{3}}$

Wegen $a > 0$ kommt nur $a_1 = \sqrt{\frac{49}{3}}$ in Betracht.

Parametergleichung der Gerade g, *die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt.*

$E_{a_1}\colon\ a_1x_2 - 7x_3 = 7a_1 - 35$

$E_{a_2}\colon\ a_2x_2 - 7x_3 = 7a_2 - 35$

$E_{a_1} \cap E_{a_2}$

$a_1x_2 - 7x_3 - (\,a_2x_2 - 7x_3) = 7a_1 - 35 - (7a_2 - 35)$

$(a_1 - a_2)x_2 = 7 \cdot (a_1 - a_2)$

$x_2 = 7 \qquad x_2 \rightarrow E_{a_1}$

$7x_2 - 7x_3 = 7a_1 - 35 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5$

Da E_a keine x_1-Koordinate enthält, setzen wir $x_1 = t$.

Die Schnittgerade hat damit die Gleichung:

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

a für Mindesthöhe von $2\,m$ im gesamten Gewächshaus:
Der Aufpunkt von g ist gleich dem Punkt G (siehe Grafik). Die Gerade ist Schnittgerade aller Ebenen, somit kann sich die Höhe der Punkte F und G nicht ändern mit $x_3 = 5$.
Jede Ebene E_a schneidet die x_3-Achse in $S_{x_3}(0|0|h_3)$, wobei $h_3 \geq 2$ sein muss (Aufgabenstellung).
$E_a\colon\ 0 \cdot a - 7 \cdot h_3 = 7a - 35$
$7a = 7 \cdot (5 - h_3)$
$a = 5 - h_3$
Wegen $h_3 \geq 2$ ist damit $a \leq 3$
Wegen $a > 0$ gilt somit:
Für $0 < a \leq 3$ wird die Mindesthöhe von $2\,m$ im gesamten Gewächshaus gewährleistet.