

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Lösungslogik B1

- a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Koordinatengleichung der Ebene E:

Wir bilden den Normalenvektor \vec{n}_E über das Kreuzprodukt der Vektoren \vec{AB} und \vec{AS} , stellen daraus die Koordinatengleichung auf und berechnen noch über eine Punktprobe mit einem der drei Punkte den Parameter d .

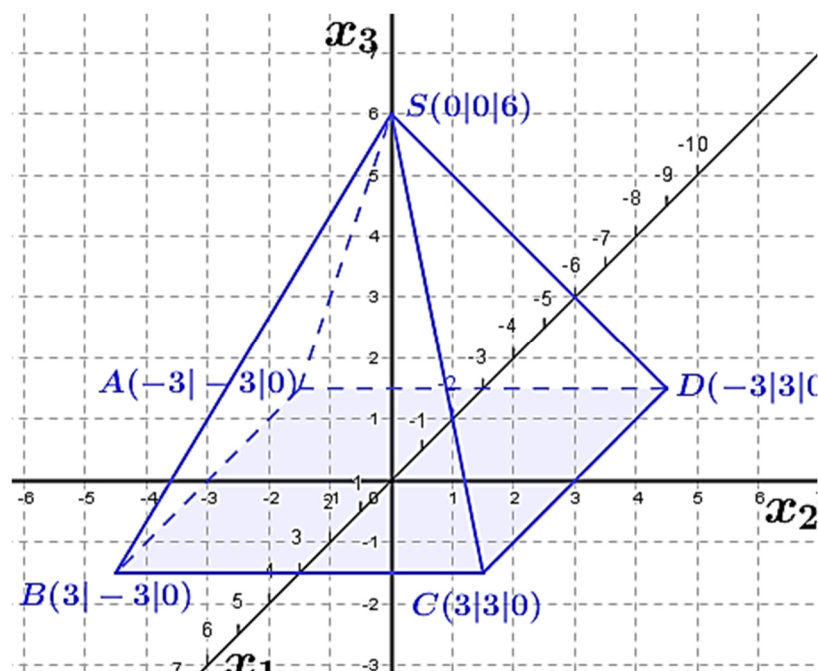
Oberflächeninhalt der Pyramide:

Wir berechnen die Grundfläche und danach die Fläche der vier Seitendreiecke. Die Fläche eines Seitendreiecks entspricht dabei $\frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AS}|$.

- b) *Koordinaten eines Punktes im Innern der Pyramide:*
Der Abstand zu den Seitenflächen sei h . Dann hat der Punkt die Koordinaten $P(0|0|\sqrt{5} \cdot h)$.
Wir berechnen den Abstand dieses Punktes zu einer Seitenfläche über die HNF.
- c) *Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS:*
Wir bestimmen die Koordinaten der Punkte M_1 und M_2 , bilden den Vektor $\vec{M_1M_2}$ und den Vektor \vec{DS} . Orthogonalität ist gegeben, wenn $\vec{M_1M_2} \circ \vec{DS} = 0$.

Klausuraufschrieb B1

- a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Koordinatengleichung der Ebene E:

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

$$k \cdot \vec{n}_E = \vec{AB} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ -3 - (-3) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 - (-3) \\ 0 - (-3) \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} = -18 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: 2x_2 - x_3 = d$$

$$2 \cdot (-3) - 0 = d \quad \rightarrow \quad d = -6$$

$$E: 2x_2 - x_3 = -6$$

Oberflächeninhalt der Pyramide:

$$O = G + 2 \cdot |\vec{AB} \times \vec{AS}|$$

Grundfläche ist ein Quadrat mit der Länge einer Seitenkante von 6 LE.

$$G = 36 \text{ FE}$$

$$2 \cdot |\vec{AB} \times \vec{AS}| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{36^2 + 18^2} = 2 \cdot 40,25 = 80,5$$

$$O = 36 + 80,5 = 116,5 \text{ FE}$$

b) *Koordinaten eines Punktes im Innern der Pyramide:*

Der Abstand des Punktes zu einem Seitendreieck sei h . Dann hat der Punkt die Koordinaten $P(0|0|\sqrt{5} \cdot h)$

Wir bestimmen den Abstand zum Seitendreieck ABS über die HNF:

$$E: \frac{2x_2 - x_3 + 6}{\sqrt{4+1}} = 0 \quad | \quad \text{Hessesche Normalform}$$

$$d(P; E) = h = \frac{|2 \cdot 0 - \sqrt{5} \cdot h + 6|}{\sqrt{5}} = |-h + 6|$$

$$h = |-h + 6|$$

$$h_1 = -h_1 + 6$$

$$2h_1 = 6$$

$$h_1 = 3$$

$$h_2 = h_2 - 6$$

$$0 \neq -6 \quad \rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(0|0|3 \cdot \sqrt{5})$

c) *Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS:*

M_1 Kantenmitte von AB

$$\vec{OM}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -a + a \\ -a - a \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

M_2 Kantenmitte von DS

$$\vec{OM}_2 = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OD} + \vec{OS}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -a + 0 \\ a + 0 \\ 0 + 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ a \end{pmatrix}$$

$$\vec{M_1M_2} = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ \frac{a}{2} + a \\ a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix}$$

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 - (-a) \\ 0 - a \\ 2a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} = -\frac{a^2}{2} - \frac{3}{2}a^2 + 2a^2 = 0$$

Lösungslogik B2

- a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Rauminhalt des Gewächshauses:

Wir betrachten das Gewächshaus als Prisma mit der Grundfläche eines Trapezes (Viereck $ABFE$) und der Höhe $8LE$ (Kante AD bzw. BC).

Koordinatengleichung der Ebene der Dachfläche:

Wir bilden den Normalenvektor \vec{n}_E über das Kreuzprodukt der Vektoren \overrightarrow{EF} und \overrightarrow{EH} , stellen daraus die Koordinatengleichung auf und berechnen noch über eine Punktprobe mit einem der drei Punkte den Parameter d .

- b) *Wert von a , für den die Neigung der Dachfläche 30° beträgt.*

Wir berechnen den Schnittwinkel der Dachfläche mit der Grundfläche über $\cos(\varphi) = \frac{|n_1 \circ n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}$, setzen $\varphi = 30^\circ$ und lösen die Gleichung nach a auf.

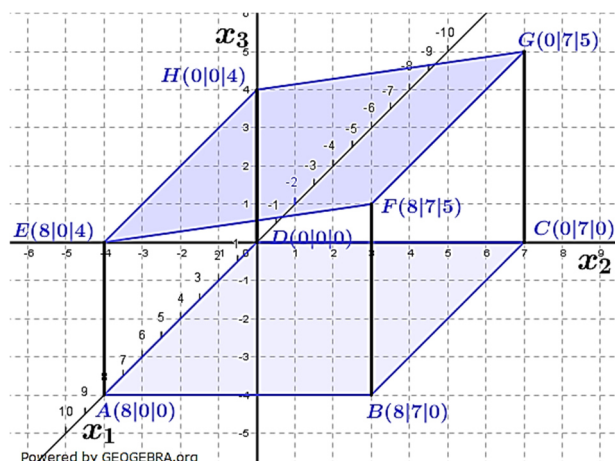
Parametergleichung der Gerade g , die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt.
Wir schneiden eine Ebene E_{a_1} mit einer Ebene E_{a_2} .

a für Mindesthöhe von $2m$ im gesamten Gewächshaus:

Die Dachfläche dreht sich ja um die soeben ermittelte Schnittgerade. Der Aufpunkt der Schnittgeraden fällt mit dem Punkt G zusammen, sodass im hinteren Bereich sich die Höhe nicht verändert. Die Höhe des Gewächshauses kann somit nur im vorderen (linken) Bereich verändert werden. Der Spurpunkt jeder Ebene E_a hat die Koordinaten $S_{x_3}(0|0|h_3)$, wobei $h_3 \geq 2$ sein soll (Aufgabenstellung).

Klausuraufschrieb B2

- a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

Rauminhalt des Gewächshauses:

$$V_{Prisma} = G \cdot h_{Prisma}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{Trapez} \quad \text{mit } a = AE = 4 \text{ LE}, c = BF = 5 \text{ LE} \quad \text{und } h_{Trapez} = AB = 7 \text{ LE}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot (4 + 5) \cdot 7 = 31,5 \text{ FE}$$

$$V_{Prisma} = 31,5 \cdot 8 = 252 \text{ VE}$$

Das Volumen des Gewächshauses beträgt 252 m³.

Koordinatengleichung der Ebene der Dachfläche:

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

$$k \cdot \vec{n}_E = \vec{EF} \times \vec{EH} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 7-0 \\ 5-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 56 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$E: x_2 - 7x_3 = d$$

$$0 - 7 \cdot 4 = d \quad \rightarrow \quad d = -28$$

$$E: x_2 - 7x_3 = -28$$

b) *Wert von a, für den die Neigung der Dachfläche 30° beträgt.*

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad \text{mit } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = 30^\circ \quad \rightarrow \quad \cos(30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -7 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -7 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{|-7|}{\sqrt{a^2 + 49}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$14 = \sqrt{3a^2 + 147}$$

$$196 = 3a^2 + 147$$

$$3a^2 = 49$$

$$a^2 = \frac{49}{3}$$

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{49}{3}}$$

Wegen $a > 0$ kommt nur $a_1 = \sqrt{\frac{49}{3}}$ in Betracht.

Parametergleichung der Gerade g, die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt.

$$E_{a_1}: a_1x_2 - 7x_3 = 7a_1 - 35$$

$$E_{a_2}: a_2x_2 - 7x_3 = 7a_2 - 35$$

$$E_{a_1} \cap E_{a_2}$$

$$a_1x_2 - 7x_3 - (a_2x_2 - 7x_3) = 7a_1 - 35 - (7a_2 - 35)$$

$$(a_1 - a_2)x_2 = 7 \cdot (a_1 - a_2)$$

$$x_2 = 7 \quad x_2 \rightarrow E_{a_1}$$

$$7x_2 - 7x_3 = 7a_1 - 35 \quad \rightarrow \quad x_3 = 5$$

Da E_a keine x_1 -Koordinate enthält, setzen wir $x_1 = t$.

Die Schnittgerade hat damit die Gleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2021 BW

a für Mindesthöhe von 2 m im gesamten Gewächshaus:

Der Aufpunkt von g ist gleich dem Punkt G (siehe Grafik). Die Gerade ist Schnittgerade aller Ebenen, somit kann sich die Höhe der Punkte F und G nicht ändern mit $x_3 = 5$.

Jede Ebene E_a schneidet die x_3 -Achse in $S_{x_3}(0|0|h_3)$, wobei $h_3 \geq 2$ sein muss (Aufgabenstellung).

$$E_a: 0 \cdot a - 7 \cdot h_3 = 7a - 35$$

$$7a = 7 \cdot (5 - h_3)$$

$$a = 5 - h_3$$

Wegen $h_3 \geq 2$ ist damit $a \leq 3$

Wegen $a > 0$ gilt somit:

Für $0 < a \leq 3$ wird die Mindesthöhe von 2 m im gesamten Gewächshaus gewährleistet.