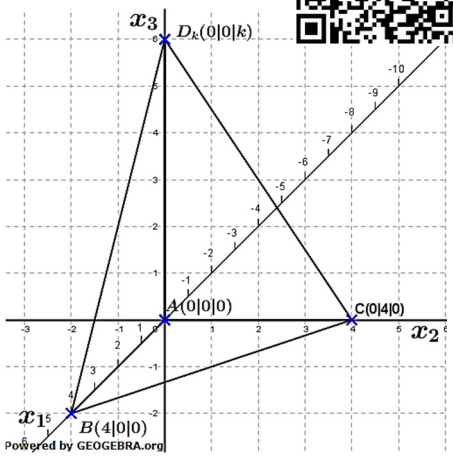
Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2022 BW

Aufgabe B1

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet (siehe Abbildung)



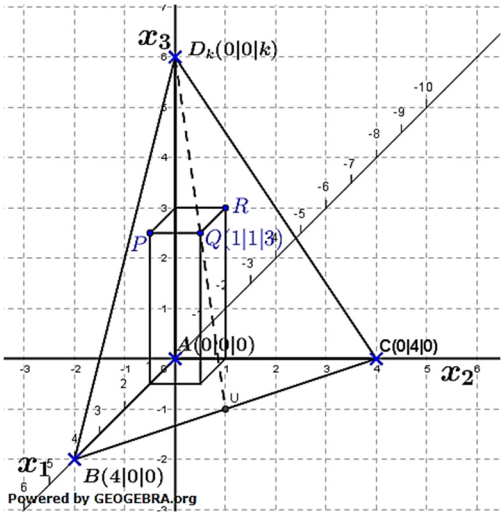
a) Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist.
Der Mittelpunkt der Strecke BC ist $M(2|2|0)$.
$|\overrightarrow{MD_k}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}\right|$ ist die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k.

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene

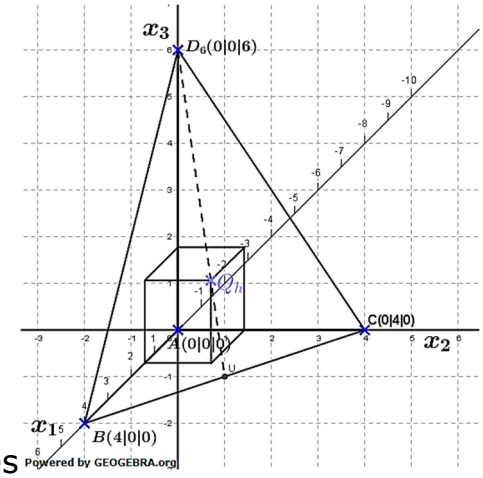
$$L_k\colon\ k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + 4x_3 = 4k.$$

b) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene L_k schneidet, $30\,°$ beträgt.

c) Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und $Q(1|1|3)$ sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenfläche des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen. Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck. Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k.
Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet.



d) Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d.h. diejenige für $k = 6$, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader einbeschrieben (vgl. Abbildung 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der x_1x_2-Ebene, haben den Eckpunkt A gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe h der Quader durchläuft alle reellen Werte mit $0 < h < 6$. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q_h.



Aufgabe B2

Gegeben sind die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; a; $t \in \mathbb{R}$.

und die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört.
Alle Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(Teilergebnis: E: $x_2 + 3x_3 = -6$)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den g_a die x_2-Achse schneidet.
Es gibt zwei Geraden der Schar g_a , die die Gerade h im Winkel $45°$ schneiden. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2022 BW

Lösungslogik B1

a) *Begründung gleichschenkliges Dreieck BCD_k:*
Die Längen der Seiten BD_k und CD_k sind gleich lang, die Seite BC ist unterschiedlich lang.
Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k.
Die Fläche des Dreiecks bestimmt sich über:
$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MD_k}\right|$

b) *Wert von k für Schnittwinkel 30 ° zwischen x_3-Achse und der Ebene L_k:*
Schnittwinkel Gerade / Ebene über $\sin(\varphi)$

c) *Wert von k für Seitenfläche BCD_k durch Eckpunkte P und R:*
Wir bestimmen die Koordinaten des Punktes P (alternativ Punkt Q) und machen eine Punktprobe in L_k.
Anzahl der Eckpunkte eines Vielecks in Abhängigkeit von k.
Siehe Klausuraufschrieb.

d) *Ermitteln der Koordinaten eines Punktes Q_h:*
Der Punkt liegt in der Ebene L_6. Wegen quadratischer Grundfläche hat der Punkt die Koordinaten $Q_h(q_1|q_1|h)$.
Wir machen eine Punktprobe in L_6 und ermitteln q_1 in Abhängigkeit von h.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2022 BW

Klausuraufschrieb B1

a) *Begründung gleichschenkliges Dreieck BCD_k:*

$$|\overrightarrow{BD_k}| = \left|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-0 \\ k-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2}$$

$$|\overrightarrow{CD_k}| = \left|\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-4 \\ k-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}$$

Wegen $|\overrightarrow{BD_k}| = |\overrightarrow{CD_k}| \wedge |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{BD_k}|$ ist das Dreieck BCD_k gleichschenklig für $k \neq 4$. Für $k = 4$ ist das Dreieck BCD_k gleichseitig.

Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k.

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{MD_k}|$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{4+4+k^2}$$

$$A_{BCD} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8+k^2} = 2 \cdot \sqrt{16+2k^2}$$

b) *Wert von k für Schnittwinkel 30 ° zwischen x_3-Achse und der Ebene L_k:*

Normalenvektor $\overrightarrow{n_{L_k}} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor x_3-Achse $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_{L_k}} \circ \vec{u}|}{|\overrightarrow{n_{L_k}}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} k \\ k \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2k^2+16} \cdot \sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{2k^2+16}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2k^2+16}} = 0{,}5 \qquad | \quad \cdot \sqrt{2k^2+16};\ :0{,}5$$

$$8 = \sqrt{2k^2+16} \qquad | \quad \uparrow^2$$

$$64 = 2k^2 + 16 \qquad | \quad -16;\ :2$$

$$k^2 = 24$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{24}$$

Für Ebene $L_{\sqrt{24}}$ schneidet die x_3-Achse unter einem Winkel von 30 °.

c) *Wert von k für Seitenfläche BCD_k durch Eckpunkte P und R:*

Koordinaten von P

$P(1|0|3)$

$P \rightarrow L_k$

L_k: $k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + 4x_3 = 4k$

$k + 0 + 4 \cdot 3 = 4k$

$3k = 12$

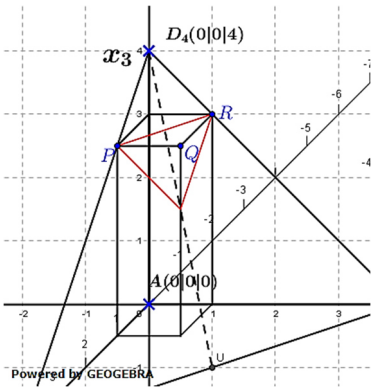
$k = 4$

Die Eckpunkte P und Q liegen in der Ebene L_4.

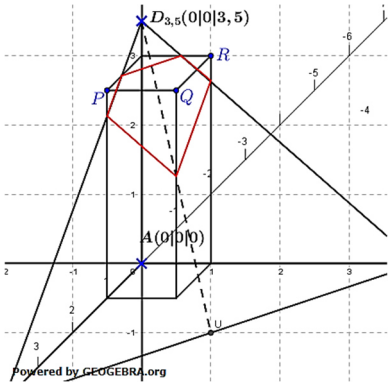
Anzahl der Eckpunkte eines Vielecks in Abhängigkeit von k.

Für $k = 6$ ist $Q(1|1|3) \in L_6$, es existiert kein Vieleck.

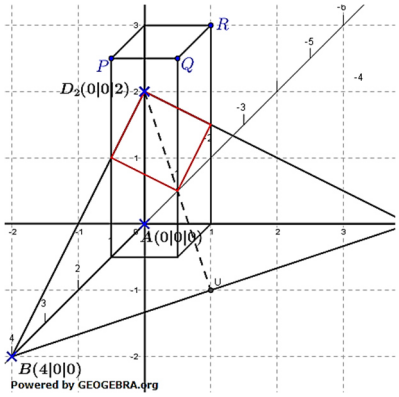
Für $4 \leq k < 6$ schneidet die Ebene den Quader in einem Dreieck.



Für $3 < k < 4$ schneidet die Ebene den Quader in einem Fünfeck.



Für $0 < k \leq 3$ schneidet die Ebene den Quader in einem Viereck.



d) *Ermitteln der Koordinaten eines Punktes Q_h:*
Der Punkt liegt in der Ebene L_6. Wegen quadratischer Grundfläche hat er die Koordinaten $Q_h(q_1|q_1|h)$.
$Q_h \rightarrow L_6 :: \quad 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4x_3 = 24$
$6 \cdot q_1 + 6 \cdot q_2 + 4h = 24$
$12q_1 = 24 - 4h$
$q_1 = 2 - \frac{1}{3}h$
$Q_h\left(2 - \frac{1}{3}h \middle| 2 - \frac{1}{3}h \middle| h\right)$

Lösungslogik B2

a) *Besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem:*
Die Gerade h verläuft parallel zu x_1-Achse.

Gerade h zur Schar g_a:
Richtungsvektor von g_0 entspricht dem Richtungsvektor von h. Es muss noch geprüft werden, ob der Aufpunkt von h in g_0 liegt.

Koordinatengleichung Ebene E aller g_a:
Wir bilden die Koordinatengleichung einer Ebene aus zwei unterschiedliche Richtungsvektoren von g_a, z. B. von g_a undg_{a+h}. Wir erstellen den Normalenvektor der Ebene über das Vektorprodukt aus beiden Richtungsvektoren. Der Normalenvektor darf keinen Parameter a mehr enthalten.

b) *Wert von a, für den g_a die x_2-Achse schneidet.*
Im Schnittpunkt mit der x_2-Achse sind x_1 und $x_2 = 0$.
Zwei Schargeraden g_a , die h im Winkel $45°$ schneiden:
Berechnung des Schnittwinkels zwischen g_a und h über den $\cos(\varphi)$.

c) *Gerade, die von allen g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen g_a windschief verläuft.*
Eine solche Gerade muss in einer Ebene verlaufen, die parallel zur Ebene E aller g_a verläuft und zu E den Abstand $\sqrt{40}$ hat.
Bildung dieser Ebene F, Selektion eines beliebigen Punktes in F als Aufpunkt der aufzustellenden Geradengleichung h.
Bestimmung eines Richtungsvektors senkrecht auf dem Normalenvektor von F für diese Geradengleichung.

Klausuraufschrieb B2

a) *Besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem:*
Die Gerade h verläuft parallel zu x_1-Achse.
Gerade h zur Schar g_a:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit Aufpunkt von h

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$-6 = 3t \quad \Rightarrow \quad t = -2$
$0 = -2 - t \qquad t = -2$
$h \subseteq g_a$

Koordinatengleichung Ebene E aller g_a:

Es sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g_a und $\vec{v} = \begin{pmatrix} a+h \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g_{a+h}.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a+h \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \\ -3h \end{pmatrix} = -h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E: x_2 + 3x_3 = d$
Aufpunkt von $g_a \to E$
$x_2 + 3 \cdot (-2) = d$
$d = -6$
$E: x_2 + 3x_3 = -6$

b) <u>*Wert von a, für den g_a die x_2-Achse schneidet.*</u>

$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1 + at = 0$

$-2 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2$

$1 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

<u>*Zwei Schargeraden g_a , die h im Winkel $45\,°$ schneiden:*</u>

Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g_a und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von h, so gilt für den Schnittwinkel:

$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2+10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{a^2+10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{a^2+10}}$

$\cos(45\,°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{a^2+10}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{10}{a^2+10} = \frac{2}{4}$

$40 = 2a^2 + 20$

$2a^2 = 20$

$a^2 = 10$

$a_1 = \sqrt{10}; \quad a_2 = -\sqrt{10}$

Die Geraden $g_{\sqrt{10}}$ und $g_{-\sqrt{10}}$ schneiden h unter einem Winkel von $45\,°$.

c) <u>*Gerade, die von allen g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen g_a windschief verläuft.*</u>

Gerade verläuft in Ebene F parallel zu E aller g_a im Abstand $\sqrt{40}$.

$E\colon x_2 + 3x_3 = -6$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_{o_E}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punkt in Ebene F $\sqrt{40}$ über Ebene E:

$$\overrightarrow{OP_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$F: x_2 + 3x_3 = d$ | Punktprobe mit P_F

$-4 + 3 \cdot 6 = d$ ➔ $d = 14$

$F: x_2 + 3x_3 = 14$

Wähle beliebigen Punkt auf für Aufpunkt der Geraden, z. B. $Q(0|14|0)$

Wähle Richtungsvektor für Gerade senkrecht zu $\overrightarrow{n_E}$,

z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\overrightarrow{n_E} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Eine mögliche Gerade wäre:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ andere Lösungen denkbar.