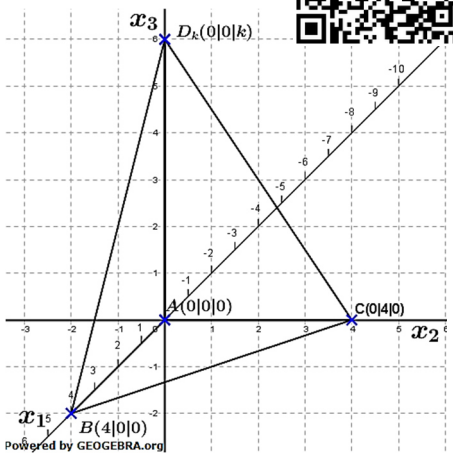
Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2022 BW

Aufgabe B1

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet (siehe Abbildung)



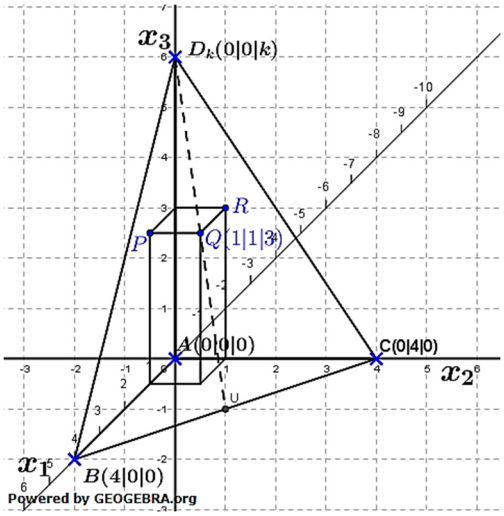
a) Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist.
Der Mittelpunkt der Strecke BC ist $M(2|2|0)$.
$|\overrightarrow{MD_k}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}\right|$ ist die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k.

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene

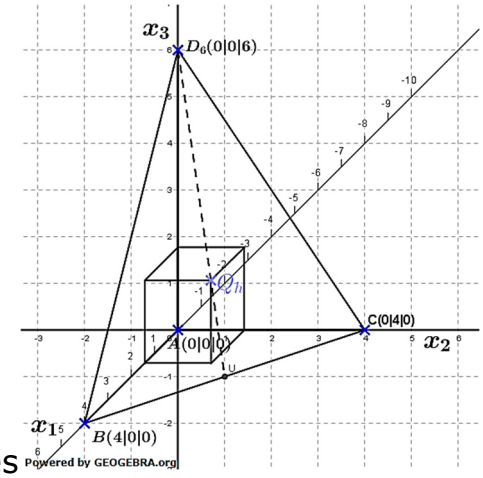
$$L_k\colon\ k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + 4x_3 = 4k.$$

b) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene L_k schneidet, $30\,°$ beträgt.

c) Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und $Q(1|1|3)$ sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenfläche des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen. Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck. Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k.
Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet.



d) Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d.h. diejenige für $k = 6$, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader einbeschrieben (vgl. Abbildung 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der x_1x_2-Ebene, haben den Eckpunkt A gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe h der Quader durchläuft alle reellen Werte mit $0 < h < 6$. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q_h.



Aufgabe B2

Gegeben sind die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; a; $t \in \mathbb{R}$.

und die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört.
Alle Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(Teilergebnis: E: $x_2 + 3x_3 = -6$)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den g_a die x_2-Achse schneidet.
Es gibt zwei Geraden der Schar g_a , die die Gerade h im Winkel $45°$ schneiden. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft.