Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

Lösungslogik B1

a) *Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche:*
Zunächst bestimmen wir die fehlenden Koordinaten der Punkte B, D, E und C.
Danach bestimmen wir die Länge der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ und berechnen daraus die Größe der Werbefläche.
Andere Werbeflächen schließen rechten Winkel ein:
Wir prüfen, ob das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{DF} \circ \overrightarrow{FE}$ den Wert 0 ergibt.

b) *Berechnung der Parameter a und b:*
Wir setzen z. B. den gegebenen Punkt A in die Ebenengleichung ein, erhalten damit eine Gleichung mit zwei Unbekannten und wählen eine Unbekannt frei, z. B. $a = 1$.

c) *Abstand von E zum Mast gleich Abstand Mittelpunkt $\overline{DE}$ zum Mast:*
Wir bestimmen den Abstand der Mastspitze zu Ebene E über die HNF und anschließend die Länge der Strecke vom Mittelpunkt von $\overline{DE}$ zur Mastspitze. Beide Berechnungen müssen denselben Wert ergeben. Da der Mast rund ist mit Durchmesser $d = 0{,}8\ m$ ist sind dadurch auch die beiden Abstände zum Mast gleich groß.

d) *Winkel der Sichtlinie $\overline{KG}$ gegenüber der Horizontalen:*
Dies ist der Schnittwinkel zwischen dem Richtungsvektor $\overrightarrow{KG}$ und dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Horizontalebene. Berechnung über $\sin(\varphi)$.
Vorgehensweise zur Berechnung der Koordinaten von H:
Siehe Klausuraufschrieb.

e) *Besondere Lage einer Ebene L im Koordinatensystem:*
Zu beachten ist die konstante x_2-Koordinate der Flugbahn, daraus leitet sich die besondere Lage der Ebene L ab.
Prüfung, ob Ball die Mauer trifft, bevor er den Boden berührt:
Wir bestimmen die Flugzeit des Bals bis zum Erreichen der Mauer über die x_1-Koordinate der Flugbahn. Mit der ermittelten Flugzeit berechnen wir die Höhe des Balls über die x_3-Koordinate der Flugbahn. Ist diese größer oder gleich Null, so trifft der Ball die Mauer bevor er auf den Boden gelangt. Ist die Flughöhe kleiner als Null, trifft der Ball die Mauer nicht.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

Klausuraufschrieb B1

a) *Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche:*
Feststellung fehlender Koordinaten:
$B(-2|5|11);\ E(-2|5|15);\ D(5|-2|15);\ C(-2|-2|11)$
$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$
$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -2-5 \\ 5-(-2) \\ 11-11 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$$
$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 5-(-5) \\ -2-(-2) \\ 15-11 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16}$$
$A_{ABCD} = \sqrt{98} \cdot \sqrt{16} = 39{,}6$
Die Werbefläche ist $39{,}6\, m^2$ *groß.*
Andere Werbeflächen schließen rechten Winkel ein:
$\overrightarrow{DF} \circ \overrightarrow{FE} \stackrel{?}{=} 0$
$$\begin{pmatrix} -2-5 \\ -2-(-2) \\ 15-15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2-(-2) \\ 5-(-2) \\ 15-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$
Wegen $\overrightarrow{DF} \circ \overrightarrow{FE} = 0$ *schließen die anderen Werbeflächen einen rechten Winkel ein.*

b) *Berechnung der Parameter a und b:*
$E\colon\ ax_1 + ax_2 = b$
Punktprobe mit $A(5|-2|11)$
$5a - 2a = b$
$3a = b$
Mit $a = 1$ ist $b = 3$
$E\colon\ x_1 + x_2 = 3$

c) *Abstand von E zum Mast gleich Abstand Mittelpunkt $\overline{DE}$ zum Mast:*
Abstand Mast-Ebene über die HNF für z. B. Mastpunkt $S(0|0|15)$ (andere Mastpunkte denkbar).
$d(H;E) = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, m.$
Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$:
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 15 \end{pmatrix}$$
Die Mastspitze hat $S(0|0|15)$.
$$|\overrightarrow{MS}| = \left|\begin{pmatrix} 0-1{,}5 \\ 0-1{,}5 \\ 15-15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2{,}25+2{,}25} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, m$$
Da der Mast rund ist, ist auch der Abstand zum Mastrand mit $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 0{,}4\, m$ gleich groß.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

d) *Winkel der Sichtlinie $\overline{KG}$ gegenüber der Horizontalen:*

$\overrightarrow{KG} = \begin{pmatrix} 4-24 \\ -1-15 \\ 11-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene (Horizontalebene)

$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{KG} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{KG}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{400+256+100}} = \frac{10}{\sqrt{756}}$

$\varphi = arcsin\left(\frac{10}{\sqrt{756}}\right) = 21{,}3\,°$

Vorgehensweise zur Berechnung der Koordinaten von H:

1. Der Punkt H befindet sich auf der Geraden g durch die Punkt B und E.
2. Die Sichtebene des Kindes ist die Ebene F durch die gegebenen Punkte K, Q und P.
3. Der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene F ist der gesuchte Punkt H.

e) *Besondere Lage einer Ebene L im Koordinatensystem:*

Die Flugbahnwird durch die Punkte $R_t(32-8t|5|-5t^2+6{,}5t+0{,}3)$ beschrieben. Die x_2-Koordinate aller Punkte R_t ist konstant mit 5. Damit ist die Ebene L parallel zur x_1x_3-Ebene im Abstand 5. Ihre Gleichung lautet:

$L\colon\ x_2 = 5$

Prüfung, ob Ball die Mauer trifft, bevor er den Boden berührt:

Flugzeit des Balls bis zur Mauer: $x_1 = 20$.

$32 - 8t = 20$

$8t = 12$

$t = 1{,}5\ s.$

Wie hoch ist der Ball nach $1{,}5\ s$:

$x_3 = -5t^2 + 6{,}5t + 0{,}3$

$x_3 = -5 \cdot 1{,}5^2 + 6{,}5 \cdot 1{,}5 + 0{,}3$

$x_3 = -1{,}2$

Der Ball hat vor Ablauf der 1,5 Sekunden bereits die Höhe $x_3 = 0$ erreicht, der Ball erreicht den Boden noch vor der Mauer.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

Lösungsgslogik B2

a) *Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche:*
Zunächst bestimmen wir die fehlenden Koordinaten der Punkte B, D, E und C.
Danach bestimmen wir die Länge der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ und berechnen daraus die Größe der Werbefläche.
Andere Werbeflächen schließen rechten Winkel ein:
Wir prüfen, ob das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{DF} \circ \overrightarrow{FE}$ den Wert 0 ergibt.

b) *Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt.*
Schnittwinkel Ebene / Ebene über den Kosinus $cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_L} \circ \vec{n}|}{|\overrightarrow{n_L}| \cdot |\vec{n}|}$ und daraus den Winkel selbst.

c) *Veranschaulichung des Flächeninhalts des Dreiecks ABC durch geeignete Eintragungen in der Abbildung:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Volumen des Körpers $ABCDEF$.
Das Volumen de Körpers setzt sich zusammen aus dem Dreiecksprisma $ABCDEG$ und der Dreieckspyramide $DEGF$.

d) *Größter Bereich des Intervalls $k \in]a; b[$ in dem die Ebene N_k dieselben Kanten des Körpers schneidet:*
Wir stellen die Ebenengleichung von N_k auf, die sich um die x_3-Achse dreht. Betrachten wir die gegebene Grafik, stellen wir fest, dass es eine Stellung dieser Ebene gibt, die die Kante AD des Körpers enthält. Links dieser Kante werden andere Kanten des Körpers durch N_k geschnitten als rechts neben dieser Stellung. Damit kennen wir die Grenze und müssen nur noch bestimmen, ob das Intervall links oder rechts dieser Stellung größer ist.

e) *Bestimmung der x_3-Koordinate eines Punktes Q:*
Damit das Dreieck bei Q rechtwinklig ist, muss das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{FQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ Null sein. Darüber bestimmen wir die Koordinaten von Q.

f) *Formulierung einer passenden Aufgabenstellung und Bedeutung von S:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

Klausuraufschrieb B2

a) *Ermitteln einer Gleichung der Ebene L in Koordinatenform:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_L} = \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-3 \\ 6-6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-3 \\ 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$L:\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = d$

$2 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = d$ | Punktprobe mit E

$d = 42$

$L:\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 42$

b) *Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt.*

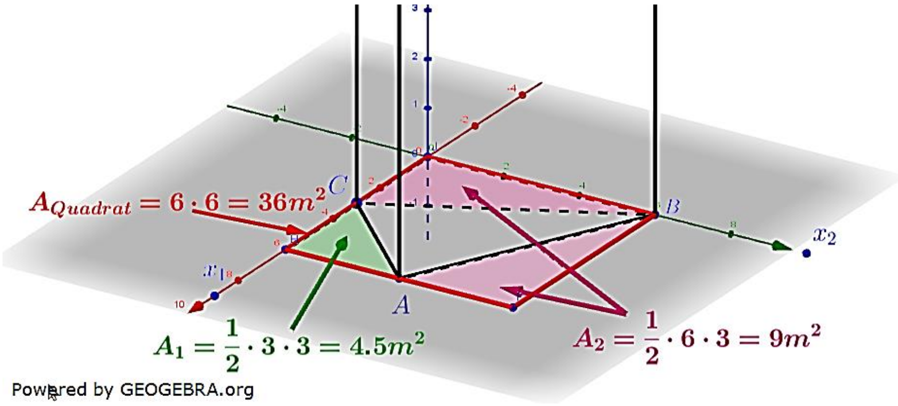
Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_L} \circ \vec{n}|}{|\overrightarrow{n_L}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{4+16+9}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right) = 56{,}1\,°$$

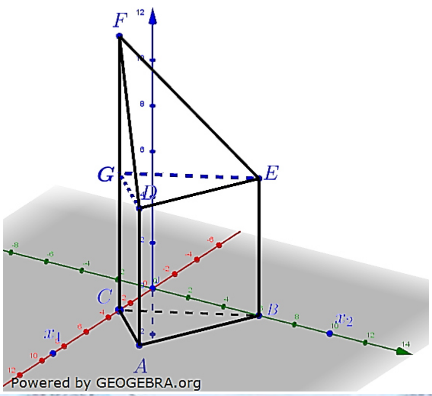
c) *Veranschaulichung des Flächeninhalts des Dreiecks ABC durch geeignete Eintragungen in der Abbildung:*

Von der umfassenden Quadratfläche $6 \cdot 6$ wird die Fläche des kleinen Dreiecks A_1 sowie zwei Mal die Fläche der beiden gleichgroßen Dreiecke A_2 abgezogen.



Volumen des Körpers $ABCDEF$.

Das Volumen de Körpers setzt sich zusammen aus dem Dreiecksprisma $ABCDEG$ und der Dreieckspyramide $DEGF$.



$V_{Körper} = V_{Prisma} + V_{Pyr}$

$V_{Prisma} = A_{Dreieck} \cdot \overline{AD}$

$V_{Prisma} = (A_{Quadrat} - A_1 - 2 \cdot A_2) \cdot \overline{AD}$

$V_{Prisma} = (36 - 4{,}5 - 18) \cdot 6 = 81\, m^3$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot A_{Dreieck} \cdot \overline{GF} = \frac{1}{3} \cdot 13{,}5 \cdot 6 = 27\, m^3$

$V_{Körper} = 81 + 27 = 108\, m^3$

Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

d) *Größter Bereich des Intervalls $k \in]a;b[$ in dem die Ebene N_k dieselben Kanten des Körpers schneidet:*

Gleichung der Ebene N_k:

$$n_{N_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 1-k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$N_k\colon\ -kx_1 + (1-k)x_2 = 0$

$N_0\colon\ x_2 = 0 \quad ➔ \quad x_1x_3$-Ebene

$N_1\colon\ x_1 = 0 \quad ➔ \quad x_2x_3$-Ebene

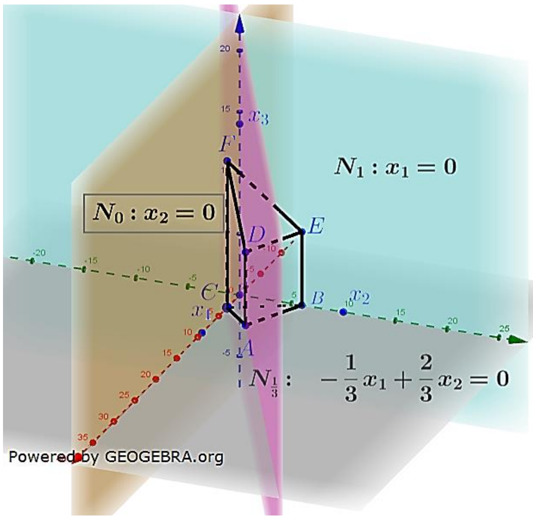
k für Ebene N_k die den Punkt A enthält:

$-6k + (1-k)3 = 0$

$-9k + 3 = 0$

$k = \frac{1}{3}$

$N_{\frac{1}{3}}\colon\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 0$



Aus der Grafik ist ersichtlich, dass es zwei Bereiche von $k \in]a;b[$ gibt, in der unterschiedliche Kanten von N_k geschnitten werden. Diese sind:

$k \in]0;\frac{1}{3}[$ schneidet die Kanten $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ und $\overline{EF}$.

$k \in]\frac{1}{3};1[$ schneidet die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ und $\overline{EF}$.

$k \in]\frac{1}{3};1[$ ist somit größter Bereich.

e) *Bestimmung der x_3-Koordinate eines Punktes Q:*

$\overrightarrow{FQ} \circ \overrightarrow{QR} = 0$

$$\begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-0 \\ q_3-12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-3 \\ 2-q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ q_3-12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2-q_3 \end{pmatrix} = 0$$

$-18 + 9 + (q_3 - 12)(2 - q_3) = 0$

$-9 + 2q_3 - q_3^2 - 24 + 12q_3 = 0$

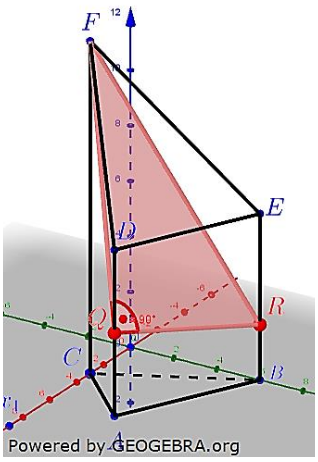
$-q_3^2 + 14q_3 - 33 = 0$

$q_3^2 - 14q_3 + 33 = 0$

$q_{3_{1,2}} = 7 \pm \sqrt{49-33} = 7 \pm \sqrt{16}$

$q_{3_1} = 1; \quad q_{3_2} = 3$

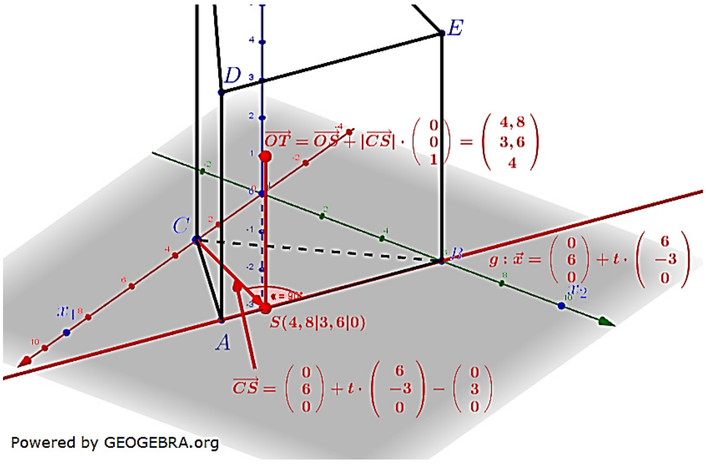
Wegen $\overline{AD} = 6$ ist $q_{3_2} = 3$ die Lösung.



Abitur Leistungskurs Wahlteil Analytische Geometrie 2023 BW

f) *Formulierung einer passenden Aufgabenstellung und Bedeutung von S:*

Aus nachfolgender Grafik ergibt sich:



Der Term $\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix}$ ist die Parameterdarstellung der Gerade g durch die Punkte A und B. Durch den Term wieder jeder Punkt der Geraden beschrieben.

Der Term $\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ beschreibt den Vektor $\overrightarrow{CS}$.

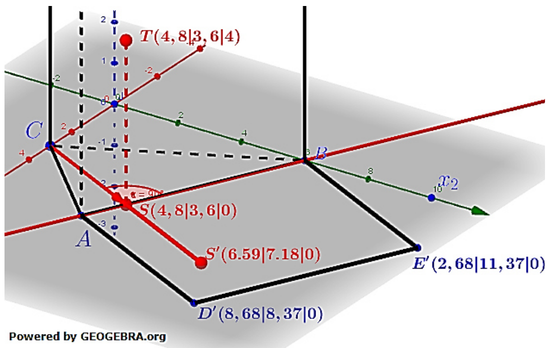
Mit dem Ausdruck

$$\begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

ist das Skalarprodukt aus dem Vektor $\overrightarrow{CS}$ und dem Richtungsvektor der Geraden dargestellt. Die Auflösung nach ergibt dann das der Geradengleichung, bei dem der Vektor $\overrightarrow{CS}$ senkrecht auf der Geraden steht. Dies ist nach Aufgabenstellung für $t = 0{,}8$ der Fall. Die Koordinaten sind dann $S(4{,}8|3{,}6|0)$.

Der Vektorzug $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + |\overrightarrow{CS}| \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ bildet den Punkt S mit der Länge $|\overrightarrow{CS}|$ senkrecht über der Geraden stehend auf den Punkt T ab.

Wird nun der Körper um die Achse AB so lange gedreht, bis der Punkt D in der x_1x_2-Ebene zu liegen kommt, dann ist das eine Drehung um $90°$ und dadurch gelangt der Punkt T in die x_1x_2-Ebene und C geht in T über



Bedeutung von S:

S ist der Fußpunkt des Lots von C auf die Gerade AB.

Aufgabenstellung:

Der mit C bezeichnete Eckpunkt des Körpers wird nach der Drehung mit T bezeichnet. Ermitteln Sie die Koordinaten von T.