Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Aufgabe C1

Ein Unternehmen füllt Honig in Gläser mit der Aufschrift $250\ g$ ab. Die Füllmenge X eines Glases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\mu = 252$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ (alle Angaben in g).

a) Ein Glas wird zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als $250\ g$ Honig in diesem Glas sind.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens $2\ \%$ von $250\ g$ abweicht.

b) Gesucht ist ein Wert $a \neq 245$ mit $P(a \leq X \leq a+5) = P(245 \leq X \leq 250)$.
Begründen Sie, dass es solch einen Wert von a gibt und geben Sie diesen Wert an.

c) Bei einer neuen Abfüllanlage beträgt die Standardabweichung der Füllmenge $1\ g$. Bei ihr kann man durch einen Regler den Erwartungswert der Füllmenge mit einer Genauigkeit von $0{,}1\ g$ einstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Glas weniger als $250\ g$ enthält, soll höchstens $15\ \%$ betragen.
Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss.

Bei einer Sonderaktion wird jedes fünfte Glas auf der Deckelinnenseite mit einem von außen nicht sichtbaren Gutschein versehen.

d) Lena kauft während der Sonderaktion sechs Gläser und stellt sie in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein."
B: „Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein."
C: „In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein, und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander."

e) Die Gläser werden in Kartons abgepackt und an Lebensmittelgeschäfte ausgeliefert. Jeder Karton enthält 30 Gläser. Ein Kunde nimmt drei Gläser aus dem Karton und hofft, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $50\ \%$ mindestens einen Gutschein zu erhalten.
Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser mit Gutschein, die sich dafür mindestens in dem Karton befinden müssen.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Aufgabe C2.1

Bei einem Glücksrad gibt es drei farbige Sektoren. Beim einmaligen Drehen beträgt die Wahrscheinlichkeit für rot $60\,\%$, für blau $30\,\%$ und für grün $10\,\%$.

a) Das Glücksrad wird 20-mal gedreht. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 15-mal erscheint rot."
B: „Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau."

b) Bei einem Glücksspiel darf man für einen Einsatz von $6\,€$ das Glücksrad zweimal drehen. Wenn dabei genau einmal rot erscheint, dann erhält man einen bestimmten Auszahlungsbetrag. Wenn zweimal rot erscheint, dann erhält man das Siebenfache dieses Auszahlungsbetrags. Andernfalls erfolgt keine Auszahlung. Das Spiel ist fair.
Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag für den Fall, dass genau einmal rot erscheint.

c) Jemand vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für rot in Wirklichkeit geringer als $60\,\%$ ist. Deshalb soll ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für rot ausgegangen wird.
Formulieren Sie eine Nullhypothese, die dieser Zielsetzung entspricht und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe C2.2

Bei einem Spielautomaten wird vermutet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit größer als $10\,\%$ ist.
Die Vermutung wird mit Hilfe eines Hypothesentests mit dem Stichprobenumfang von $n = 200$ und einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ getestet. Als Nullhypothese wird $H_0 \geq 0{,}1$ gewählt.
Formulieren Sie die Entscheidungsregel.
Tatsächlich gilt $p = 0{,}08$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler der zweiten Art.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Lösungslogik C1

a) *Wahrscheinlichkeit für Glas Honig weniger als $250\ g$:*
Gesucht ist $P(X < 250)$ einer Standardnormalverteilung mit $\mu = 252$ und $\sigma = 2$.

Wahrscheinlichkeit dass Füllmenge eines Glases um höchstens $2\ \%$ von $250\ g$ abweicht:
Gesucht ist $P(0{,}98 \cdot 250 \leq X \leq 1{,}02 \cdot 250)$ einer Standardnormalverteilung mit $\mu = 252$ und $\sigma = 2$.

b) *Begründung für einen Wert von a:*
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Ermittlung eines Mindestwerte der Erwartungswertes der Füllmenge:*
Die Zufallsgröße Y gibt die Füllmenge der neuen Anlage in g an.
Y ist normalverteilt mit $\sigma = 1$ und einem unbekannten Erwartungswert μ.
Gesucht wird μ, sodass $P(X < 250) \leq 0{,}15$ ist.

d) *Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse:*
Es handelt sich um Wahrscheinlichkeiten in Verbindung mit der Binomialverteilung.

e) *Mindestens, mindestens, mindestens Aufgabe:*
ACHTUNG FALLE!!!
Es handelt sich hier nicht mehr um eine Binomialverteilung, es ist Ziehen OHNE Zurücklegen.

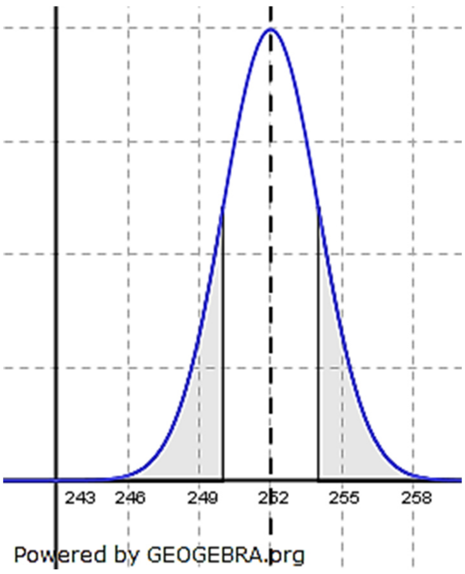
Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Klausuraufschrieb C1

a) *Wahrscheinlichkeit für Glas Honig weniger als $250\ g$:*
Normalverteilung mit $\mu = 252$, σ und $X < 250$.
$P(X < 250) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1585$

Wahrscheinlichkeit dass Füllmenge eines Glases um höchstens $2\ \%$ von $250\ g$ abweicht:
Normalverteilung mit $\mu = 252$, σ und $0{,}89 \cdot 250 \leq X \leq 1{,}02 \cdot 250$.
$P(X \leq 1{,}02 \cdot 250) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9332$ $P(X \leq 0{,}98 \cdot 250) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0002$
$P(X \leq 1{,}02 \cdot 250) - P(X \leq 0{,}98 \cdot 250) = 0{,}9332 - 0{,}0002 = 0{,}933$

b) *Begründung für einen Wert von a:*
Die Dichtefunktion der Normalverteilung (die Glockenkurve) ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu = 252$.
Der Inhalt der linken grauen Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(245 \leq X \leq 250)$.



Aufgrund der Symmetrie hat die rechte graue Fläche denselben Inhalt.
Somit gilt $P(245 \leq X \leq 250) = P(254 \leq X \leq 259)$.
Es gibt also einen solchen Wert von a, dieser ist $a = 254$.

c) Ermittlung eines Mindestwerte der Erwartungswertes der Füllmenge:
Die Zufallsgröße Y gibt die Füllmenge der neuen Anlage in g an.
Y ist normalverteilt mit $\sigma = 1$ und einem gesuchten Erwartungswert μ, sodass $P(X < 250) \leq 0{,}15$ ist.
WTR: (ausprobieren)
Für $\mu = 251$ gilt $P(X < 250) \leq 0{,}159$
Für $\mu = 251{,}1$ gilt $P(X < 250) \leq 0{,}136$
Der Erwartungswert der Füllmenge muss mindestens $251{,}1\ g$ betragen.

d) *Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse:*

A: „Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein."

$B_{6;0,2}(X=3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}082$

B: „Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein."

Diese Frage beinhaltet **NICHT**, dass nach den ersten beiden Gläsern mit Gutschein keine Gläser mit Gutschein mehr folgen.

$P(B) = 0{,}2^2 = 0{,}04$

C: „In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein, und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander."

Von den genau zwei Gläsern mit Gutschein ($B_{6;0,2}(X=2)$) ist die Wahrscheinlichkeit abzuziehen, dass diese Gläser unmittelbar nebeneinander stehen ($5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4$).

$P(C) = B_{6;0,2}(X=2) - 5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}24576 - 0{,}08192 = 0{,}1683$

e) *Mindestens, mindestens, mindestens Aufgabe:*

Im Karton befinden sich x Gläser mit Gutschein von insgesamt 30 Gläsern.
Ein Kunde nimmt $n = 3$ Gläser. Die Zufallsvariable steht für Glas mit Gutschein.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$P(X=0) = \frac{30-x}{30} \cdot \frac{29-x}{29} \cdot \frac{28-x}{25}$

$f(x) = 1 - \frac{30-x}{30} \cdot \frac{29-x}{29} \cdot \frac{28-x}{25} \geq 0{,}5$

$f(4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}36$

$f(5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}43$

$f(6) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}501$

Es müssen mindestens 6 Gläser mit einem Gutschein in der Verpackung sein.

Lösungslogik C2.1

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*
Die drei Farben des Glücksrades können zu zwei Farben zusammengefasst werden, nämlich „blau" und „nicht blau".

b) *Auszahlungsbetrag für genau einmal rot:*
Der Erwartungswert ist Null (faires Spiel).
Der Auszahlungsbetrag für einmal rot sei a, dann ist er für zweimal rot $7a$.
Berechnung des Erwartungswertes mit Auflösung nach a.

c) *Formulierung einer Nullhypothese:*
Wir bestimmen p_0 von H_0 und p_1 von H_1. Daraus entscheiden wir, ob es sich um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Test handelt.

Klausuraufschrieb C.21

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*

A: „Genau 15-mal erscheint rot."
$P(rot) = 0{,}6; \quad P(\overline{rot}) = 0{,}4; \; n = 20$
$B_{20;0,6}(X = 15) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}075$

B: „Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau."
$P(blau) = 0{,}3; \quad P(\overline{blau}) = 0{,}7; \; n = 20$
Genau 2-mal blau bei den ersten 10 Drehungen:
$B_{10;0,3}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2335$
Wenn bei den ersten 10 Drehungen genau 2 Mal blau erscheint, darf bei den zweiten 10 Drehungen höchstens dreimal blau erscheinen.
$B_{10;0,3}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}6496$
$B_{10;0,3}(X = 2) \cdot B_{10;0,3}(X \leq 3) = 0{,}2335 \cdot 0{,}6496 = 0{,}152$

b) *Auszahlungsbetrag für genau einmal rot:*
$P(r) = 0{,}6; \quad P(\bar{r}) = 0{,}4; \; n = 2$
$P(rr) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36; \qquad P(r\bar{r}; \bar{r}r) = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$
Der Auszahlungsbetrag bei einmal rot sei a, Der Erwartungswert $E(X) = 0$ (Aufgabenstellung)
$E(X) = 0{,}48 \cdot a + 0{,}36 \cdot 7 \cdot a - 6 = 0$
$3a - 6 = 0$
$a = 2\text{ €}$
Der Auszahlungsbetrag für einmal rot ist 2 €, der für zweimal rot 14 €.

c) *Formulierung einer Nullhypothese:*
$H_0\!: \; p_0 \leq 0{,}6; \quad H_1\!: \; p_1 > 0{,}6;$
Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.
Nullhypothese: *„Die Wahrscheinlichkeit für rot beträgt höchstens 60 %".*
Durch den Hypothesentest soll vermieden werden, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie dennoch richtig ist (Fehler der 1. Art).

Lösungslogik C2.2

Formulierung einer Nullhypothese:
Wir bestimmen p_0 von H_0 und p_1 von H_1. Daraus entscheiden wir, ob es sich um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Test handelt.

Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art:
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit mit für den ersten Wert des Annahmebereichs des Hypothesentests.

Klausuraufschrieb C.2

Formulierung einer Nullhypothese:
H_0: $p_0 \geq 0{,}1$; H_1: $p_1 < 0{,}1$; $n = 200$; $\alpha = 0{,}05$.
Linksseitiger Test: $\overline{A} = [0; k]$; $A = [k+1; n]$
Entscheidungsregel:
Die H_0-Hypothese wird verworfen, wenn bei 200 Spielen höchstens k Gewinne erscheinen, sodass $B_{200;0,1}(X \leq k) < 0{,}05$ ist.

k	$B_{200;0,1}(X \leq k)$
11	0,017
12	0,032
13	0,057

Die H_0-Hypothese wird verworfen, wenn bei 200 Spielen höchstens 12 Gewinne erscheinen.

Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art:
Der erste Wert des Annahmebereichs des Hypothesentest ist $k = 13$

$B_{200;0,08}(X \geq 13) = 1 - B_{200;0,08}(X \leq 12) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}818$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die H_1-Hypothese fälschlicherweise abgelehnt wird, beträgt etwa $82\,\%$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de