Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Lösungslogik C1

a) *Wahrscheinlichkeit für Glas Honig weniger als $250\ g$:*
Gesucht ist $P(X < 250)$ einer Standardnormalverteilung mit $\mu = 252$ und $\sigma = 2$.

Wahrscheinlichkeit dass Füllmenge eines Glases um höchstens $2\ \%$ von $250\ g$ abweicht:
Gesucht ist $P(0{,}98 \cdot 250 \leq X \leq 1{,}02 \cdot 250)$ einer Standardnormalverteilung mit $\mu = 252$ und $\sigma = 2$.

b) *Begründung für einen Wert von a:*
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Ermittlung eines Mindestwerte der Erwartungswertes der Füllmenge:*
Die Zufallsgröße Y gibt die Füllmenge der neuen Anlage in g an.
Y ist normalverteilt mit $\sigma = 1$ und einem unbekannten Erwartungswert μ.
Gesucht wird μ, sodass $P(X < 250) \leq 0{,}15$ ist.

d) *Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse:*
Es handelt sich um Wahrscheinlichkeiten in Verbindung mit der Binomialverteilung.

e) *Mindestens, mindestens, mindestens Aufgabe:*
ACHTUNG FALLE!!!
Es handelt sich hier nicht mehr um eine Binomialverteilung, es ist Ziehen OHNE Zurücklegen.

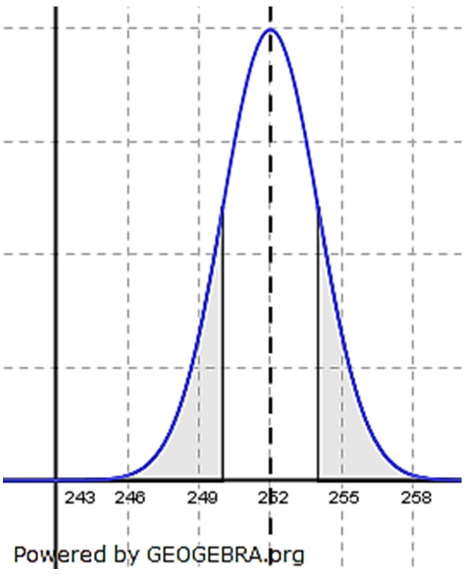
Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Klausuraufschrieb C1

a) *Wahrscheinlichkeit für Glas Honig weniger als $250\ g$:*
Normalverteilung mit $\mu = 252$, σ und $X < 250$.
$P(X < 250) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1585$

Wahrscheinlichkeit dass Füllmenge eines Glases um höchstens $2\ \%$ von $250\ g$ abweicht:
Normalverteilung mit $\mu = 252$, σ und $0{,}89 \cdot 250 \leq X \leq 1{,}02 \cdot 250$.
$P(X \leq 1{,}02 \cdot 250) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9332 \qquad P(X \leq 0{,}98 \cdot 250) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0002$
$P(X \leq 1{,}02 \cdot 250) - P(X \leq 0{,}98 \cdot 250) = 0{,}9332 - 0{,}0002 = 0{,}933$

b) *Begründung für einen Wert von a:*
Die Dichtefunktion der Normalverteilung (die Glockenkurve) ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu = 252$.
Der Inhalt der linken grauen Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(245 \leq X \leq 250)$.



Aufgrund der Symmetrie hat die rechte graue Fläche denselben Inhalt.
Somit gilt $P(245 \leq X \leq 250) = P(254 \leq X \leq 259)$.
Es gibt also einen solchen Wert von a, dieser ist $a = 254$.

c) Ermittlung eines Mindestwerte der Erwartungswertes der Füllmenge:
Die Zufallsgröße Y gibt die Füllmenge der neuen Anlage in g an.
Y ist normalverteilt mit $\sigma = 1$ und einem gesuchten Erwartungswert μ, sodass $P(X < 250) \leq 0{,}15$ ist.
WTR: (ausprobieren)
Für $\mu = 251$ gilt $P(X < 250) \leq 0{,}159$
Für $\mu = 251{,}1$ gilt $P(X < 250) \leq 0{,}136$
Der Erwartungswert der Füllmenge muss mindestens $251{,}1\ g$ betragen.

d) *Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse:*

A: „Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein.“

$B_{6;0,2}(X=3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}082$

B: „Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein.“

Diese Frage beinhaltet **NICHT**, dass nach den ersten beiden Gläsern mit Gutschein keine Gläser mit Gutschein mehr folgen.

$P(B) = 0{,}2^2 = 0{,}04$

C: „In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein, und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander.“

Von den genau zwei Gläsern mit Gutschein ($B_{6;0,2}(X=2)$) ist die Wahrscheinlichkeit abzuziehen, dass diese Gläser unmittelbar nebeneinander stehen ($5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4$).

$P(C) = B_{6;0,2}(X=2) - 5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}24576 - 0{,}08192 = 0{,}1683$

e) *Mindestens, mindestens, mindestens Aufgabe:*

Im Karton befinden sich x Gläser mit Gutschein von insgesamt 30 Gläsern. Ein Kunde nimmt $n=3$ Gläser. Die Zufallsvariable steht für Glas mit Gutschein.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$P(X=0) = \frac{30-x}{30} \cdot \frac{29-x}{29} \cdot \frac{28-x}{25}$

$f(x) = 1 - \frac{30-x}{30} \cdot \frac{29-x}{29} \cdot \frac{28-x}{25} \geq 0{,}5$

$f(4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}36$

$f(5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}43$

$f(6) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}501$

Es müssen mindestens 6 Gläser mit einem Gutschein in der Verpackung sein.

Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2021 BW

Lösungslogik C2.1

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*
Die drei Farben des Glücksrades können zu zwei Farben zusammengefasst werden, nämlich „blau" und „nicht blau".

b) *Auszahlungsbetrag für genau einmal rot:*
Der Erwartungswert ist Null (faires Spiel).
Der Auszahlungsbetrag für einmal rot sei a, dann ist er für zweimal rot $7a$.
Berechnung des Erwartungswertes mit Auflösung nach a.

c) *Formulierung einer Nullhypothese:*
Wir bestimmen p_0 von H_0 und p_1 von H_1. Daraus entscheiden wir, ob es sich um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Test handelt.

Klausuraufschrieb C.21

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*

A: „Genau 15-mal erscheint rot."
$P(rot) = 0{,}6; \quad P(\overline{rot}) = 0{,}4; \; n = 20$
$B_{20;0,6}(X = 15) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}075$

B: „Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau."
$P(blau) = 0{,}3; \quad P(\overline{blau}) = 0{,}7; \; n = 20$
Genau 2-mal blau bei den ersten 10 Drehungen:
$B_{10;0,3}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2335$
Wenn bei den ersten 10 Drehungen genau 2 Mal blau erscheint, darf bei den zweiten 10 Drehungen höchstens dreimal blau erscheinen.
$B_{10;0,3}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}6496$
$B_{10;0,3}(X = 2) \cdot B_{10;0,3}(X \leq 3) = 0{,}2335 \cdot 0{,}6496 = 0{,}152$

b) *Auszahlungsbetrag für genau einmal rot:*
$P(r) = 0{,}6; \quad P(\overline{r}) = 0{,}4; \; n = 2$
$P(rr) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36; \qquad P(r\overline{r}; \overline{r}r) = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$
Der Auszahlungsbetrag bei einmal rot sei a, Der Erwartungswert $E(X) = 0$ (Aufgabenstellung)
$E(X) = 0{,}48 \cdot a + 0{,}36 \cdot 7 \cdot a - 6 = 0$
$3a - 6 = 0$
$a = 2\,€$
Der Auszahlungsbetrag für einmal rot ist $2\,€$, der für zweimal rot $14\,€$.

c) *Formulierung einer Nullhypothese:*
$H_0\colon\; p_0 \leq 0{,}6; \quad H_1\colon\; p_1 > 0{,}6;$
Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.
Nullhypothese: *„Die Wahrscheinlichkeit für rot beträgt höchstens 60 %".*
Durch den Hypothesentest soll vermieden werden, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie dennoch richtig ist (Fehler der 1. Art).

Lösungslogik C2.2

Formulierung einer Nullhypothese:
Wir bestimmen p_0 von H_0 und p_1 von H_1. Daraus entscheiden wir, ob es sich um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Test handelt.

Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art:
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit mit für den ersten Wert des Annahmebereichs des Hypothesentests.

Klausuraufschrieb C.2

Formulierung einer Nullhypothese:
H_0: $p_0 \geq 0{,}1$; $\quad H_1$: $p_1 < 0{,}1$; $\quad n = 200$; $\quad \alpha = 0{,}05$.
Linksseitiger Test: $\overline{A} = [0; k]$; $\; A = [k+1; n]$
Entscheidungsregel:
Die H_0-Hypothese wird verworfen, wenn bei 200 Spielen höchstens k Gewinne erscheinen, sodass $B_{200;0,1}(X \leq k) < 0{,}05$ ist.

k	$B_{200;0,1}(X \leq k)$
11	$0{,}017$
12	$0{,}032$
13	$0{,}057$

Die H_0-Hypothese wird verworfen, wenn bei 200 Spielen höchstens 12 Gewinne erscheinen.

Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art:
Der erste Wert des Annahmebereichs des Hypothesentest ist $k = 13$

$B_{200;0,08}(X \geq 13) = 1 - B_{200;0,08}(X \leq 12) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}818$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die H_1-Hypothese fälschlicherweise abgelehnt wird, beträgt etwa $82\,\%$.